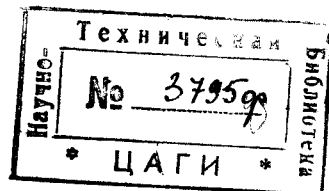


С. С. С. Р.

№ 127 НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ОТДЕЛ В.С.Н.Х. № 127

Труды Центрального Аэро-Гидродинамического Института
Выпуск 20

Б. .Н ЮРЬЕВ



ИНДУКТИВНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ КРЫЛЬЕВ АЭРОПЛАНА

Пособие для аэродинамического расчета коробки крыльев

Предисловие.

Издавая эту монографию, ЦАГИ стремится заполнить пробел в нашей авиационной литературе, заключающийся в полном отсутствии работ, посвященных теории индуктивного сопротивления крыльев.

Эта теория в настоящее время занимает в аэродинамическом расчете аэропланов центральное место. На основании ее положений производится пересчет крыльев с одного размаха на другой, рассчитываются крылья произвольного очертания в плане, отыскиваются характеристики сложной полипланной коробки крыльев по продувке моноплана, она дает методы учета влияния аэродинамической трубы на испытываемую модель самолета и на ней же базируется расчет продольной устойчивости самолета. Каждому конструктору или исследователю самолетов приходится все время пользоваться ее понятиями и производить с ее помощью различные расчеты.

На русском языке руководств по этому вопросу не имеется, и нашим работникам приходится прибегать или к иностранным источникам, или же пользоваться отрывочными сведениями об этой теории, излагаемыми в журнальных статьях.

За границей теория индуктивного сопротивления вызвала к жизни значительную литературу и побудила аэродинамические лаборатории произвести многочисленные работы по ее проверке. Опыты дали в общем блестящее ее подтверждение и она вполне вошла теперь в практику расчета самолетов. Вследствие этого на всех языках появились в научно-официальных изданиях подробные изложения этой теории. Правда, еще многое в ней не вполне обосновано с точки зрения чистой гидродинамики, например, не вполне ясен механизм возникновения вокруг крыла циркуляции скорости в идеальной жидкости.

Однако, для техника важно не столько строгое обоснование теории, как тот факт, что она во многих случаях дает поразительное совпадение предсказанных ею числовых результатов с данными опыта.

Предлагаемая работа проф. Б. Н. Юрьева содержит, помимо систематического изложения этой теории, еще детальную разработку ряда вопросов, имеющих особо важное значение для практики.

Коллегия ЦАГИ.

Введение.

Основания вихревой теории поддерживающих поверхностей были разработаны еще задолго до войны. Профессоры Кутта, С. А. Чаплыгин и Н. Е. Жуковский дали еще в 1910—1912 годах теорию монопланного крыла и теорию решеток.

Эти теоретические исследования проверялись у нас в только-что тогда построенных лабораториях Московского Университета и Высшего Технического Училища. Как теория, так и опыты с новыми „теоретическими профилями крыльев“ были тогда же опубликованы проф. Н. Е. Жуковским на русском и на немецком языках. Только вследствие этого обстоятельства исследования Н. Е. Жуковского по крыльям стали известны за границей и крыльям типа инверсии параболы там присваивается теперь имя Николая Егоровича. Работы русских ученых не ограничивались лишь вопросом моноплана, — проф. С. А. Чаплыгин решил ряд задач о прорезных крыльях и о решетках. Собственно, инверсии параболы были найдены одновременно проф. Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным. Первый шел геометрическим путем, второй же дал чисто аналитическое решение. В настоящее время теория таких крыльев разработана очень подробно и является весьма интересною и полезною главою аэродинамики.

Однако, все эти теоретические исследования относятся лишь к плоско-параллельному течению воздуха, следовательно, они приложимы лишь к крыльям бесконечно большого размаха. В основу таких исследований кладется знаменитая теорема о подъемной силе крыла, выведенная проф. Н. Е. Жуковским еще в 1906 году.

Так как на практике приходится всегда иметь дело с крыльями конечного размаха, то сам собой возникает вопрос о законности применения этих выводов к пространственному течению воздуха. Вместе с тем опыты давно уже указали на сильное влияние относительного размаха крыльев на их аэродинамические характеристики и побудили конструкторов искать какие-либо формулы для пересчета аэродинамических свойств крыльев при переходе от одного размаха к другому. Точно так же возникла задача и об определении аэродинамических характеристик сложной полипланной коробки крыльев по результатам обдувки монопланного крыла¹⁾.

¹⁾ В качестве иллюстрации см. Technical Report of the Advisory Committee for Aeronautics 1918 — 19. Vol. I. стр. 366. Статья E. F. Relf. An empirical method for the prediction of wing characteristics from model tests.

Все эти задачи долгое время считались неразрешимыми ввиду трудности строго математической обработки вопросов пространственного течения жидкости.

В настоящее время, благодаря применению теории вихрей, удалось решить с вполне достаточною для целей практики точностью целый ряд важных задач. Эта теория появилась в 1918 году в Германии и носит в настоящее время название теории проф. Л. Прандтля.

Следует однако заметить, что подход к решению задачи о крыле конечного размаха с помощью теории вихрей был намечен раньше всех (в 1907 г.) английским профессором Ф. Ланчестером, давшим схему вихрей как для крыла, так и для пропеллера. В неизданных работах проф. Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина имеется также решение нескольких задач этим приемом. В особенности широко была использована теория вихрей Н. Е. Жуковским и В. П. Ветчинкиным для разработки приемов расчета гребного винта. В этой области мы опередили границу приблизительно на 8—10 лет. В настоящее время вихревая теория гребного винта вновь разработана и в Германии и в Англии.

Таким образом, хотя и следует признать, что идеи, положенные в основу теории проф. Л. Прандтля, не новы и неоднократно высказывались разными авторами, однако, доведение этой теории до конечных результатов и вывод основных рабочих формул составляют исключительную заслугу этого выдающегося ученого и его талантливых учеников.

В настоящее время эта теория весьма сильно разветвилась и уже возникла на всех языках большая литература по этому вопросу.

Мы в этой работе преследовали почти исключительно прикладные цели и стремились дать читателю в возможно простой и краткой форме главные выводы теории проф. Л. Прандтля и научить его пользоваться этою теориею на практике.

Вследствие этого мы и не пытались давать всюду строгие выводы, — к слову сказать, в этой теории очень громоздкие, — и во многих случаях предпочли наглядность и простоту точности изложения. Большое внимание мы уделили разработке самих методов расчета, так как этот вопрос до сих пор еще очень мало разрабатывался.

Первая часть этой книги была издана в 1922 году Институтом Инженеров Красного Воздушного Флота и в настоящее время она совершенно разошлась; в ней применялись Эйфелевские коэффициенты аэродинамических сил. Теперь же, с переходом ЦАГИ на абсолютные коэффициенты C_u и C_x , мы всюду придерживались этих, более удобных, обозначений ¹⁾.

¹⁾ Как известно, $C_u = \frac{P}{\rho S V^2}$ и $C_x = \frac{Q}{\rho S V^2}$, где P — подъемная сила, Q — сопротивление, S — площадь крыла, V — скорость полета и ρ — массовая плотность воздуха, равная для нормальных условий (760 мм Hg и 15° C) приблизительно $\frac{1}{8}$.

Ч А С Т Ь I.

ГЛАВА I.

Основы теории вихрей.

Напомним вкратце основные положения теории вихрей. Крайне важным в гидродинамике является понятие о „циркуляции скорости“ по любому замкнутому контуру. Проведем внутри текущей жидкости какой-нибудь контур ABC (фиг. 1). Тогда в любой точке этого контура (напр., A) жидкость будет течь с некоторой скоростью w . Если в точке A провести касательную AA_1 и спроектировать на нее скорость w , то мы получим $w \cos \alpha$, где α — угол между скоростью и касательной. Умножая эту проекцию на длину элемента дуги этого контура dL , мы получим элементарную циркуляцию; обозначим ее dJ , тогда:

$$dJ = w \cos \alpha dL.$$

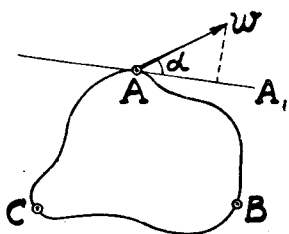
Если просуммируем эту величину по всему контуру, то получим циркуляцию по замкнутому контуру ABC

$$J = \oint w \cos \alpha dL, \quad (1)$$

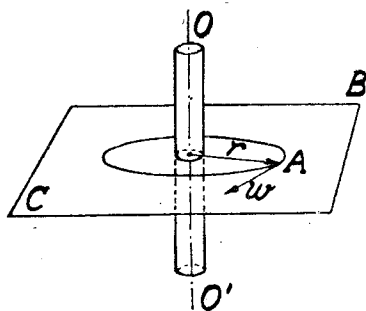
здесь значек \oint показывает, что взят замкнутый контур.

При помощи циркуляции определяется, завихрено ли течение жидкости, или нет. Если циркуляция по любому контуру внутри жидкости не равна нулю, то это означает, что движение завихрено; если равна нулю, — то не завихрено.

Наиболее простым случаем завихрения является прямолинейный вихревой шнур (фиг. 2). В нем жидкость завихрена равномерно. Ближайшее исследование показывает, что такой шнур просто вращается как твердое тело около своей оси OO' . Жидкость снаружи может быть и не завихрена. Однако, в последнем случае, как показывает подробное изучение, жидкость не будет находиться в покое, а придет



Фиг. 1.



Фиг. 2.

в особое циклическое движение, при чем частицы хотя и будут бегать по круговым траекториям, однако, не будут иметь угловой скорости. Далее оказывается, что циркуляция скорости по любому контуру, охватывающему вихревой шнур, равна постоянной величине. Таким образом, силу вихря можно измерять циркуляцией вокруг него. Если через контур проходят несколько вихрей, то имеет место знаменитая теорема Стокса—циркуляция по контуру равна алгебраической сумме циркуляций отдельных вихрей, через него проходящих. Эта теорема позволяет находить скорости в потоке, вызванные вихрями. В случае одного бесконечного вихревого шнура, в силу симметрии, находим для кругового контура, лежащего в плоскости СВ, перпендикулярной к оси вихря, величину циркуляции:

$$J = w 2\pi r,$$

отсюда получаем скорость, им вызванную:

$$w = \frac{J}{2\pi r},$$

где r —расстояние исследуемой точки от оси вихря. Если имеется несколько вихрей, то применяется „принцип наложения“ или „независимости действия“, по которому полная вызванная вихрями скорость в данной точке равна геометрической сумме скоростей, вызванных отдельными вихрями.

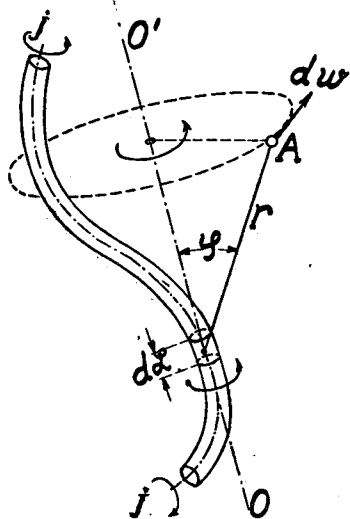
Относительно вихрей имеются теоремы Гельмгольца¹⁾:

1) циркуляция скорости вокруг вихревого шнура по всей его длине остается величиной постоянной.

2) циркуляция скорости вокруг вихревого шнура во все время его движения остается величиной постоянной.

3) вихревой шнур все время остается вихревым шнуром (теорема о неунуничтожаемости вихрей).

Из этих теорем следует, что вихревой шнур должен или простирается в бесконечность обоими концами, или должен замыкаться сам на себя, образуя вихревое кольцо, или он может опираться концами на границы жидкости, т.-е. на твердое тело или на ее свободную поверхность.



Фиг. 3.

¹⁾ Подробнее см. курсы гидродинамики, напр., Н. Е. Жуковский, Теоретические Основы Воздухоплавания; Аппель, Руководство Теоретической Механики, том III; А. Я. Саткевич, Аэродинамика и др.

Мы видим, что бесконечный прямолинейный вихревой шнур вызывает движение жидкости по формуле

$$w = \frac{J}{2\pi r}.$$

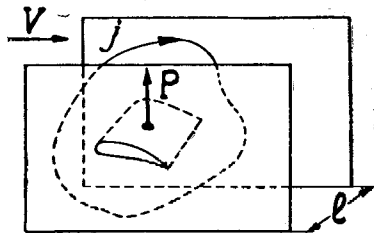
В случае криволинейных шнуров необходимо выяснить действие бесконечно малого элемента вихря на жидкость в данной точке. Оказывается, что скорость dw , вызванная элементом длиной dL в точке А (фиг. 3), лежащей на расстоянии r от центра элемента, может быть выражена так:

$$dw = \frac{J}{4\pi r^2} \sin \varphi dL.$$

Здесь φ — угол между r и осью элемента OO' , J — циркуляция вокруг вихревого шнура — величина по всей длине постоянная. Как видим, получается полная аналогия закону Био-Савара, дающему действие элемента электрического тока на магнитный полюс в точке А. Чтобы получить полное действие криволинейного шнура, нужно просуммировать геометрически все скорости dw от всех элементов по его длине, пользуясь принципом независимости.

Направление скорости dw легко найти: оно совпадает с той скоростью, с которой точка А вращалась бы около оси OO' в направлении вращения элемента шнура. Легко видеть, что в случае криволинейных шнуров или наличия нескольких прямолинейных, они будут действовать сами на себя и друг на друга. Этим объясняется, например, сложное движение вихревых колец и вращение вихрей, отброшенных гребным винтом.

Очень важна теорема Н. Е. Жуковского о поддерживающей силе крыла (фиг. 4). Им доказано, что в случае плоскопараллельного потока получается подъемная сила P только в том случае, если вокруг крыла имеется в жидкости некоторая циркуляция J (фиг. 4), при чем, если мы берем участок крыла длиной l , то эта сила найдется по формуле:



Фиг. 4.

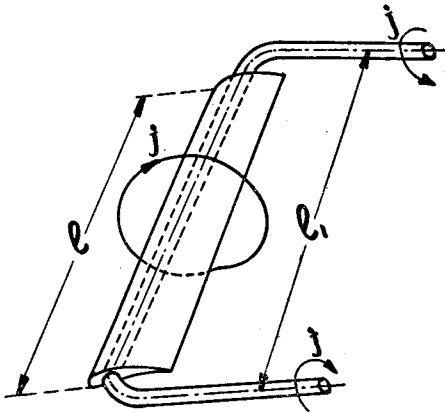
$$P = \rho J V l,$$

где ρ — массовая плотность воздуха и V — скорость потока вдали от крыла.

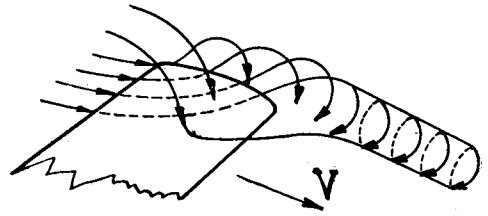
Направление силы P получится поворотом вектора скорости на прямой угол в сторону, противоположную направлению циркуляции. Крыло, следовательно, равносильно некоторой системе вихрей с общей циркуляцией J , идущих внутри крыла. Эти воображаемые вихри и

названы проф. Н. Е. Жуковским „присоединенными“. В случае бесконечно длинного крыла и вихри уходят в бесконечность, удовлетворяя теореме Гельмгольца.

Возникает вопрос, что же произойдет, если мы возьмем вместо бесконечного крыла крыло с конечным размахом l ?



Фиг. 5.

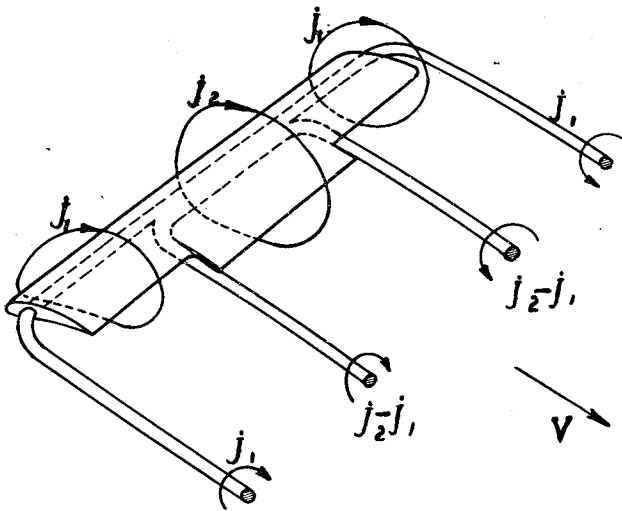


Фиг. 6.

С точки зрения гидродинамической присоединенные вихри не могут окончиться внезапно: они должны выйти из концов крыла в виде „усов“. Эти усы тотчас же по выходе из крыла подхватятся

общим течением жидкости и пойдут назад в бесконечность, давая схему, изображенную на фиг. 5. К этой же схеме легко притти путем

элементарных соображений. Ясно, что под крылом воздух сжат, а над ним разрежен. Вследствие этого струи воздуха будут на краю крыла двигаться от повышенного давления к пониженному, образуя зализы (фиг. 6). Другими словами, получится закручивание воздуха на краю крыла, которое общим течением жидкости вытянется в бесконечный вихре-



Фиг. 7.

вой шнур. Для простоты в практических расчетах можно заменять вихри, идущие внутри крыла, одним шнуром, проходящим через центр давления крыла; таким образом, крыло с усами можно заменить одним П-образным вихревым шнуром с циркуляцией J (фиг. 5). Так как наиболее сильно действуют на крыло элементы вихрей, близкие к

нему, то можно считать с достаточной точностью, что оси вихревых усов идут все время совпадая с направлением потока параллельно друг другу на расстоянии l_1 , несколько большем размаха крыльев l . Если подъемная сила на единицу длины лонжеронов постоянна, то с крыла будут сбегать лишь два уса, если переменна, то несколько, как на фиг. 7, или даже бесконечное множество, в виде завихренного слоя, как на фиг. 8.

Нам нужно теперь определить величину скорости в какой-либо точке жидкости А, вызванной прямолинейным вихревым шнуром циркуляции J (фиг. 9). Возьмем бесконечно малый элемент этого шнура длиной dL . Тогда по предыдущему

$$dw = \frac{J}{4\pi r^2} \sin \varphi dL.$$

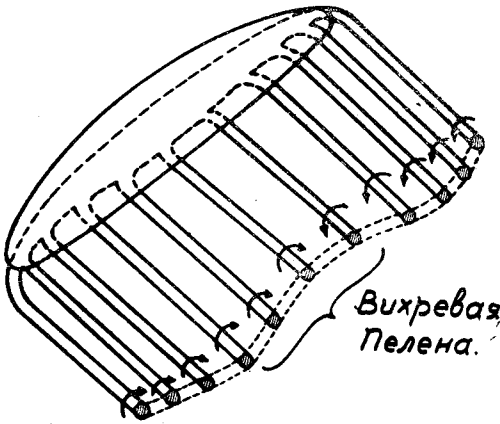
Легко видеть, что

$$\overline{CD} = r d\varphi \text{ и } dL = \frac{\overline{CD}}{\sin \varphi} = \frac{r d\varphi}{\sin \varphi}$$

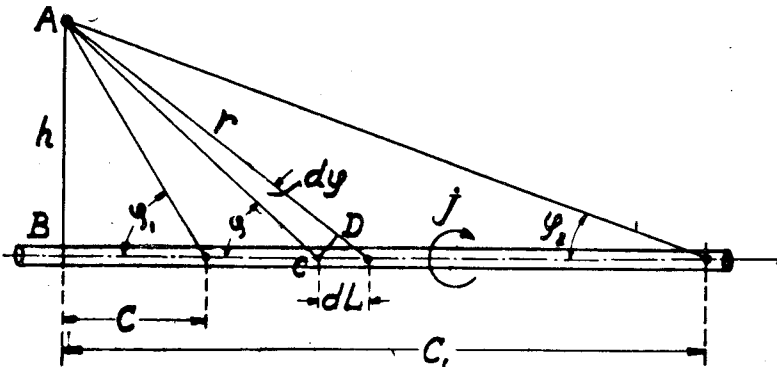
Далее $r = \frac{h}{\sin \varphi}$, где h — длина

перпендикуляра из точки А на ось вихря, следовательно:

$$dL = \frac{h}{\sin^2 \varphi} d\varphi.$$



Фиг. 8.



Фиг. 9.

Подставляя полученные величины в выражение скорости, найдем

$$dw = \frac{J \sin^2 \varphi}{4\pi h^2} \cdot \sin \varphi \cdot \frac{h d\varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{J}{4\pi h} \cdot \sin \varphi d\varphi.$$

Для получения полной скорости суммируем действие всех элементов шнура в пределах углов от φ_1 до φ_2 и получаем:

$$w = \frac{J}{4\pi h} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \sin \varphi d\varphi = \frac{J}{4\pi h} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) \quad (1')$$

В случае бесконечного шнура имеем $\varphi_2 = 0$ и $\varphi_1 = \pi$ и

$$w = \frac{J}{2\pi h} \quad (2)$$

В случае шнура с одним концом, идущим в бесконечность, и другим, лежащим на перпендикуляре АВ, — назовем его полушнуром, — найдем

и

$$\varphi_2 = 0; \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \quad w = \frac{J}{4\pi h} \quad (3)$$

Если концы шнура отстоят на расстояние c и c_1 от подошвы перпендикуляра В (фиг. 9), то замечая, что

$$\cos \varphi_1 = \frac{c}{\sqrt{h^2 + c^2}} \quad \text{и} \quad \cos \varphi_2 = \frac{c_1}{\sqrt{h^2 + c_1^2}},$$

получим из формулы (1') новое выражение для w , освобожденное от тригонометрических величин:

$$w = \frac{J}{4\pi h} \left(\frac{c_1}{\sqrt{h^2 + c_1^2}} - \frac{c}{\sqrt{h^2 + c^2}} \right). \quad (4)$$

Величину c следует брать со знаком минус, когда концы шнура лежат по разные стороны от подошвы перпендикуляра В.

Если один конец шнура уходит в бесконечность ($c_1 = \infty$), а другой лежит на расстоянии c от точки В, то формула (4) принимает вид

$$w = \frac{J}{4\pi h} \left(1 - \frac{c}{\sqrt{h^2 + c^2}} \right). \quad (4')$$

ГЛАВА II.

Вывод теоремы проф. Н. Е. Жуковского для крыла конечного размаха.

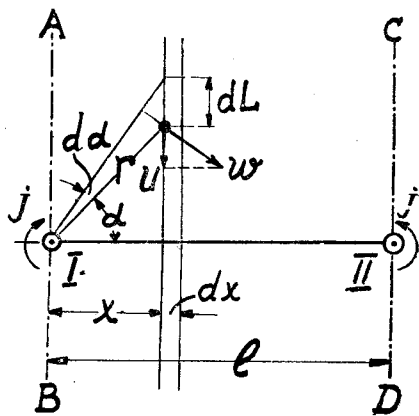
Точный вывод теоремы Н. Е. Жуковского для бесконечного крыла довольно сложен; приходится определять давление в струйке жидкости, обтекающей контур по уравнению Бернулли и затем суммировать давление по всей поверхности профиля. Однако, в случае конеч-

ного крыла с вихревыми усами эта теорема доказывается очень легко. Сразу видно, что жидкость будет гнаться вихревыми усами вниз по всей ленте воздуха, идущей между ними; — снаружи же один вихрь гонит жидкость вниз, а другой вверх. Так как по законам механики сила, поддерживающая крыло в воздухе, может получиться лишь за счет создания в воздушной массе количества движения, направленного в противоположную действию силы сторону, то мы и займемся вычислением количеств движения, создаваемого вихрями. Так как вблизи крыла воздух сжат и лишь на значительном расстоянии от него все давления обращаются в скорость, то мы и будем определять количество движения вдалеке от крыла, где влияние самого крыла может быть отброшено и где останется лишь влияние двух вихревых шнуров.

Проведем через точку, лежащую вдали от крыла, плоскость, перпендикулярную к вихрям. Она разрежет вихревые усы и мы получим на ней картину, изображенную на фиг. 10.

Расстояние между вихрями будет близким к размаху крыла, — мы примем его здесь равным размаху l .

Будем искать количество движения, создаваемое в вертикальном направлении сперва одним вихрем с циркуляцией J в бесконечно узкой полоске шириною dx и длиною, равною единице, по направлению полета.



Фиг. 10.

По предыдущему имеем:

$$w = \frac{J}{2\pi r}.$$

Ищем проекцию скорости w на вертикаль. Вводя угол α , находим:

$$u = w \cos \alpha,$$

но

$$r = \frac{x}{\cos \alpha}; \text{ следовательно, } u = \frac{J}{2\pi x} \cos^2 \alpha.$$

Количество движения, имеющееся в параллелепипеде длиною по направлению полета 1, высотой dL и шириною dx , может быть написано, считая массовую плотность воздуха равною ρ , таким образом:

$$u dm = \rho \cdot 1 \cdot dx \cdot dL.$$

Из чертежа легко усмотреть, что

$$dL = \frac{rd\alpha}{\cos\alpha} = \frac{x \cdot d\alpha}{\cos^2\alpha},$$

подставляя в предыдущую формулу эту величину, найдем:

$$u \, dm = \rho \frac{J}{2\pi} \, dx \cdot d\alpha.$$

Обозначим количество движения во всей полоске шириною dx величиною dM , тогда

$$dM = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} u \, dm = \rho \cdot \frac{J}{2\pi} \, dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\alpha = \frac{1}{2} \rho J \, dx.$$

Получилось очень интересное выражение для dM , — оно не зависит от x . Следовательно, количество движения во всех полосках одинаковой ширины dx будет одно и то же. Так как у нас имеются два вихря, то в области между ними их действие суммируется и количество движения каждой полоски удвоится и будет равно $\rho J \, dx$; снаружи же, где вихри действуют в противоположные стороны, количество движения по вертикали равно нулю. Следовательно, для получения полного количества движения нам придется суммировать лишь полоски, лежащие между вихрями.

Итак, находим

$$2M = \int_0^l 2dM = \rho J \int_0^l dx = \rho J l.$$

Это выражение дает количество движения по вертикали в полосе длиною l по направлению полета. Подъемная же сила равна секундно-образующемуся количеству движения. Ясно, что через рассматриваемую плоскость сечения в секунду будет проходить воздушная колонна длиною, равною не l , а V . Следовательно, подъемная сила окончательно выражается так:

$$P = \rho J V, \quad (5)$$

что и дает теорему Н. Е. Жуковского. Строго говоря, подъемная сила равна лишь проекции этой силы на вертикаль, но, ввиду малого угла ее наклона, мы им пренебрегаем, считая его $\cosinus = 1$. На этой теореме основана вся излагаемая здесь теория.

ГЛАВА III.

Влияние вихревых усов на крыло.

Разберем сперва действие на крыло его собственных усов. На фиг. 11 изображено монопланное крыло с соответствующими вихрями в двух проекциях. Рассмотрим сперва действие полушнура I на точку A, находящуюся на расстоянии x от его оси. По формуле (3) он вызовет в точке A скорость

$$w = \frac{J}{4\pi x},$$

направленную вниз. При изменении x скорость будет изменяться по гиперболическому закону, как это и изображено на фиг. 11.

Ищем среднюю по размаху крыла величину вертикальной скорости w^1) и удваиваем ее, так как у нас на самом деле имеется два вихря. Назовем ее w_{cp} . Пусть размах крыла l , расстояние между вихрями l_1 и

$$e = \frac{l_1 - l}{2},$$

тогда

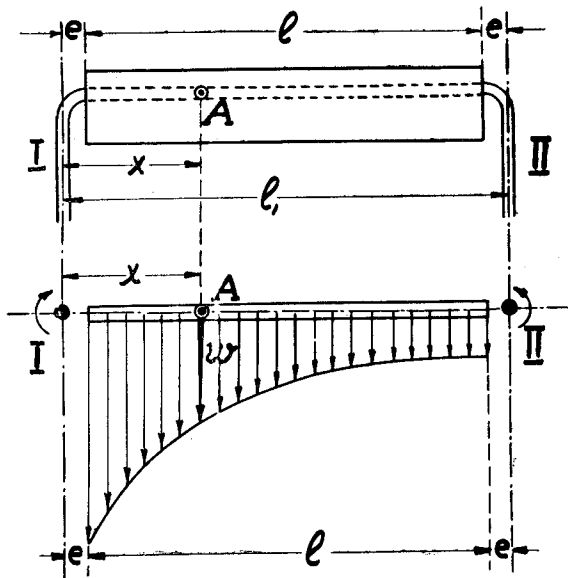
$$w_{cp} = 2 \frac{1}{l} \int_e^{l+e} w dx = \frac{J}{2\pi l} \int_e^{l+e} \frac{dx}{x} = \frac{J}{2\pi l} \ln \frac{l+e}{e}; \quad (6)$$

подставляя величину e , найдем

$$w_{cp} = \frac{J}{2\pi l} \ln \frac{l_1 + l}{l_1 - l} = \frac{J}{2\pi l} \epsilon, \quad (7)$$

где ϵ называется коэффициентом влияния крыла на самого себя или „коэффициентом самоиндукции“ монопланного крыла.

¹⁾ Т.-е. дающую площадь прямоугольника $w_{cp} l$, равную удвоенной площади, заштрихованной на фиг. 11.



Фиг. 11.

Многочисленные опыты с монопланными крыльями дают для расстояния между вихрями величину

$$l_1 \cong l. 1,05.$$

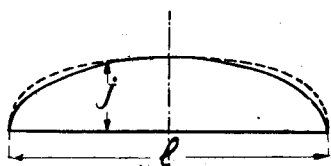
Тогда

$$\varepsilon = \ln \frac{l_1 + l}{l_1 - l} \cong 4,$$

следовательно, средняя скорость

$$w_{cp} = \frac{2J}{\pi l}.$$

Скорость w не постоянна по размаху, а довольно сильно изменяется. Можно задаться вопросом, при каком распределении циркуляции по крылу получится постоянная скорость w ? Оказывается, что для соблюдения этого условия необходимо изменять циркуляцию по закону полуэллипса по длине крыла; тогда у крыла получится не два вихревых уса, а целая вихревая поверхность, как на фиг. 8. В этом случае коэффициент влияния ε точно равен 4. У прямоугольных крыльев, однако, по опытам и по более точным вычислениям циркуляция не постоянна и изменяется по кривой, изображенной пунктиром на фиг. 12. Следовательно, для получения схемы фиг. 11, крыло должно



Фиг. 12.

к концам или расширяться, или иметь на концах большие углы атаки. Такие крылья будут подробно разобраны в второй части этой книги при изложении более точной теории.

Однако, опыты показывают, что и для обычных очертаний крыльев можно с достаточной точностью брать во всех случаях величину $\varepsilon = 4$ (по исследованиям Betz'a для прямоугольного крыла следует брать $\varepsilon = 4,2$).

Чтобы определить скорость w_{cp} , нам нужно знать циркуляцию вокруг крыла. Для ее определения пользуемся теоремой проф. Н. Е. Жуковского.

Из формулы (5) находим

$$J = \frac{P}{\rho V l}. \quad (8)$$

Подъемную силу крыла выражают в России при помощи абсолютного коэффициента подъемной силы C_y , получаемого опытным путем, и площади крыла $S m^2$ следующим образом:

$$P = \rho C_y S V^2. \quad (8')$$

Если l — размах, а b — ширина крыла, то $S = lb$. Вводим величину λ — „относительный размах“ или „удлинение“, определяя ее как отношение размаха к ширине крыла, т.-е.

$$\lambda = \frac{l}{b}$$

тогда:

$$S = \frac{l^2}{\lambda}. \quad (9)$$

И, наконец, обращаясь к форм. (8), (8') и (9), получим:

$$J = \rho \frac{C_y l^2}{\lambda l V} V^2 = C_y \cdot b V. \quad (10)$$

Теперь мы можем подставить J в выражение для w_{cp} и найти

$$w_{cp} = \frac{J}{2\pi l} \cdot \varepsilon = \frac{C_y}{2\pi} \cdot \frac{bV}{l} \cdot \varepsilon = \frac{C_y \cdot V}{2\pi \lambda} \cdot \varepsilon \quad (11)$$

При скорости потока V , набегающий на монопланное крыло воздух будет отклоняться непосредственно перед ним книзу на некоторый малый угол $\Delta \alpha = \frac{w_{cp}}{V}$, при чем $\Delta \alpha$ получится по этой формуле в радианах.

Для моноплана величина $\Delta \alpha$ носит название „скоса потока от самоиндукции“. Тогда:

$$\Delta \alpha = \frac{w_{cp}}{V} = \frac{C_y}{2\pi \lambda} \cdot \varepsilon. \quad (12)$$



Подставляя для нормальных условий $\varepsilon = 4$, получаем

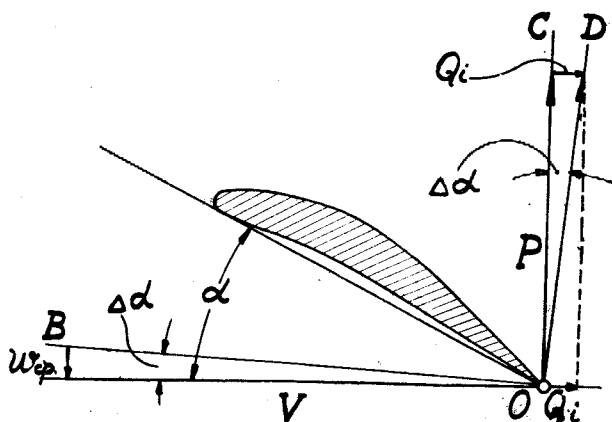
$$\Delta \alpha = \frac{2}{\pi \lambda} C_y. \quad (13)$$

Для перехода от радианов к углам в градусах служит, как известно, формула $\alpha^\circ = 57,3 \alpha$, и, следовательно, скос потока $\Delta \alpha^\circ$ в градусах будет иметь величину:

$$\Delta \alpha^\circ = 57,3 \frac{2}{\pi \lambda} C_y. \quad (13)$$

Таким образом, влияние вихревых усов вызывает скос потока в том месте, где находится крыло. Если крыло стоит под углом атаки α , то на самом деле „истинный угол атаки“ будет иметь меньшую величину (см. фиг. 13) и будет равен

$$\alpha_i = \alpha - \Delta\alpha.$$



Фиг. 13.

ответствует коэффициент подъемной силы C_y . Так как сила P всегда перпендикулярна к направлению потока, а здесь поток скошен и его направление есть BO , то сила P будет направлена по линии OD при чем

$$OD \perp OB.$$

Легко видеть, что сила P даст слагающую по направлению к невозмущенной еще скорости потока V , к которой мы и должны относить ориентировку крыла. Проектируя P на скорость V и считая угол $\Delta\alpha$, измеряемый в дуговой мере малым, получим силу Q_i — „индуктивное лобовое сопротивление“ по формуле:

$$Q_i = P \cdot \Delta\alpha. \quad (14)$$

Подъемную силу мы должны относить также к направлению перпендикуляра OC к потоку в бесконечности (к скорости V), но легко видеть, что при малом $\Delta\alpha$ его косину с близок к 1, следовательно, от перекоса подъемная сила изменится лишь за счет изменения угла атаки.

Что касается собственно до лобового сопротивления профиля Q_p , то оно мало зависит от угла и при малых его изменениях во многих случаях может считаться постоянным. Если принять опять-таки $\cos \Delta\alpha = 1$, то величина Q_p будет функцией лишь истинного угла атаки α_i . Она называется „профильным сопротивлением“ крыла.

Вследствие этого подъемная сила уменьшится соответственно новому углу атаки и, кроме того, появится дополнительное лобовое сопротивление — „индуктивное сопротивление“.

Пусть у крыла с размахом λ получилась подъемная сила P , которой соот-

Найдем теперь величину Q — полное лобовое сопротивление крыла. При сделанных предположениях, очевидно:

$$Q = Q_i + Q_p = P \Delta \alpha + Q_p. \quad (15)$$

Разделив обе части этого равенства на $\rho S V^2$ получим слева коэффициент сопротивления крыла, а справа сумму коэффициентов „индуктивного“ и „профильного“ сопротивления

$$C_x = C_i + C_p = C_y \Delta \alpha + C_p. \quad (16)$$

Мы уже знаем величину $\Delta \alpha$ перекоса потока, — форм. (12) и (13), подставляя ее в (16), найдем

$$C_x = C_p + \frac{\varepsilon}{2\pi\lambda} C_y^2 = C_p + \frac{2 C_y^2}{\pi\lambda}. \quad (17)$$

$$C_i = C_y \Delta \alpha = \frac{C_y^2}{2\pi\lambda} \varepsilon = \frac{2}{\pi\lambda} C_y^2. \quad (18)$$

Эти формулы суть основные выражения для излагаемой здесь теории.

Результаты испытаний крыльев в аэродинамических лабораториях изображаются обычно при помощи полярной кривой Лилиентала, дающей величину C_y в зависимости от C_x . По предложению Эйфеля берут для C_x масштаб в пять раз больший, чем для C_y (см. фиг. 14).

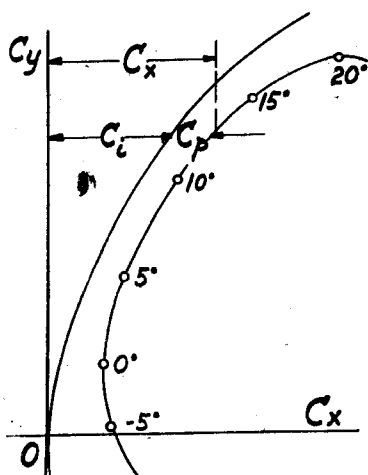
Проф. Л. Прандтль предложил наносить на полярную диаграмму Лилиентала „параболу индуктивного сопротивления“, дающую величину C_i в зависимости от C_y по уравнению (18). Для этого необходимо знать лишь величину относительного размаха λ для испытанного крыла; для данного λ получаем из (18)

$$C_i = C_y^2 \text{ const},$$

т.-е. ур-ние параболы 2-го порядка.

Парабола индуктивного сопротивления разобьет полное сопротивление C_x на две части: C_i — индуктивное и C_p — профильное.

Огромное количество продувок различных аэродинамических лабораторий дало возможность вывести следующие свойства этих кривых.



Фиг. 14.

1) Кривая Лилиенталя для хороших крыльев идет эквидистантно кривой индуктивного сопротивления на всех лётных углах. Возле посадочного угла и угла пикирования ($C_y = 0$) профильное сопротивление резко возрастает.

2) Величина профильного сопротивления очень мала и у хороших профилей мало зависит от толщины их. Она лишь немногим больше силы трения потока о поверхность крыла. Величина $C_p = 0,004 — 0,006$ у хороших тонких крыльев и $0,006 — 0,008$ — у хороших толстых.

Эти исследования имеют огромное принципиальное значение; оказывается, что даже у идеальных крыльев конечного размаха будет существовать сопротивление Q_i , зависящее лишь от подъемной силы крыла P . Если просмотреть результаты испытания крыльев в различных лабораториях, то оказывается, что индуктивное сопротивление на лётных углах значительно превосходит профильное. Для аэроплана очень важен так называемый экономический угол атаки, обычно заключающийся между $6^\circ — 10^\circ$, — им определяются основные характеристики самолета, и для него оказывается, что индуктивное сопротивление иногда в несколько раз больше профильного. Отсюда ясен вывод, что ожидать в будущем значительного улучшения крыльев не приходится, — профильное сопротивление лишь немногим больше силы трения воздуха о крыло.

Действительно, силу трения дают обычно в виде формулы:

$$Q_f = \rho C_f F V^2,$$

где F — поверхность трения и C_f — коэффициент трения; он равен приблизительно $0,0016$. Здесь $F = 2S$, так как трение происходит с двух сторон следовательно:

$$Q_f = 0,0016 \rho 2S V^2 \text{ и } C_{тр} = \frac{Q_f}{\rho S V^2} = 0,0032,$$

т.-е. оно уже близко к профильному сопротивлению хороших тонких профилей, где $C_p = 0,004$. Это небольшое увеличение C_p по сравнению с $C_{тр}$ объясняется тем, что скорость, с которой воздух трется о крыло, непостоянна в разных его местах, — она значительно больше на выпуклой стороне крыла; мы же здесь считаем ее постоянной и равной скорости полета V .

Таким образом, лучшие современные крылья почти достигли возможного предела совершенства на лётных углах. Очень часто крыло характеризуют его „качеством“, т.-е. отношением подъемной силы к сопротивлению — C_y / C_x или его обратной величиной $\mu = \frac{C_x}{C_y}$ (характеристика Эйфеля).

Легко найти, пользуясь теорией индуктивного сопротивления, наименьшую величину μ . Для этого разделим обе части уравнения (17) на C_y , тогда получим

$$\mu = \frac{C_x}{C_y} = \frac{C_p}{C_y} + \frac{2}{\pi\lambda} C_y. \quad (19)$$

Это выражение достигнет минимума при C_y , определяемом из уравнения, полученного дифференцированием уравнения (19) и приравниванием результата нулю, т.-е.:

$$\frac{d\mu}{dC_y} = -\frac{C_p}{C_y^2} + \frac{2}{\pi\lambda} = 0,$$

отсюда

$$C_y^2 = \frac{\pi\lambda}{2} C_p.$$

Подставляя эту величину в первоначальное уравнение (17), найдем $C_x = 2C_p$ и далее ищем величину наибольшего качества

$$\frac{C_y}{C_x} = \frac{\sqrt{\frac{\pi\lambda}{2} C_p}}{2C_p} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{C_p}}.$$

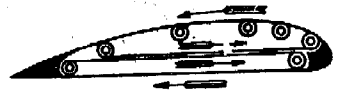
Беря для наилучших крыльев $C_p = 0,004$ и принимая размах $\lambda = 5$, найдем:

$$\left(\frac{C_y}{C_x}\right)_{\max} = 22,15.$$

Эта величина действительно близка к наибольшим из опубликованных лабораториями величинам качества крыльев.

Здесь шла речь лишь о простых аэропланнх крыльях.

Применяя более сложные устройства, можно, конечно, и далее улучшать крылья. Напр., если крыло обтянуть подвижным на роликах полотном, как это изображено на фиг. 14 bis, то под влиянием трения



Фиг. 14 bis.

это полотно придет в движение и сила трения значительно уменьшится. Если такие полотна приводить в движение от мотора, то можно будет получить вместо профильного сопротивления даже силу тяги. Давая верхнему полотну большую скорость, чем нижнему, можно будет получить увеличение циркуляции скорости около крыла и, следовательно, увеличить его подъемную силу.

Однако, такое устройство вряд ли будет рациональным из-за сложности конструкции.

Г Л А В А IV.

Переход от одного размаха крыльев к другому.

Как мы видели в предыдущей главе, коэффициент индуктивного сопротивления крыльев (форм. 18) может быть представлен формулой

$$C_i = A C_y^2, \quad (20)$$

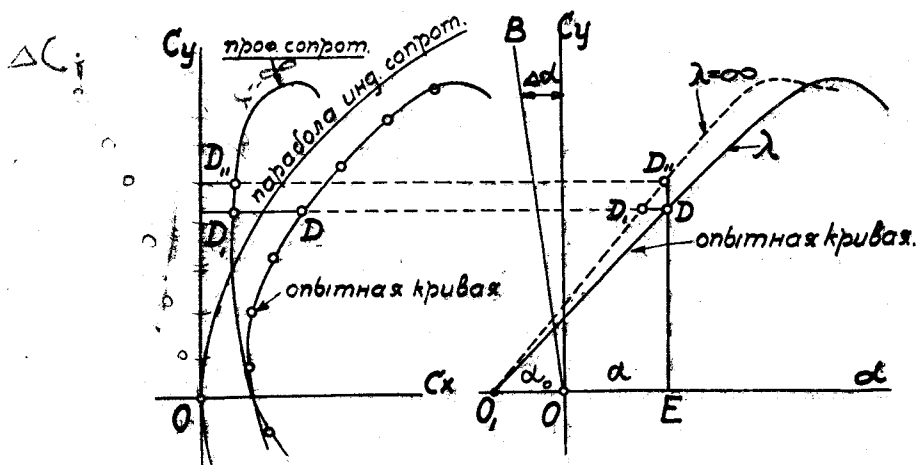
где A — коэффициент, равный точно $\frac{2}{\pi \lambda}$ для моноплана с эллиптическим распределением нагрузки по размаху. В случае монопланов с другим распределением нагрузки эта величина A вообще изменится, — для прямоугольного крыла она все же близка к величине $\frac{2}{\pi \lambda}$. Как показывает более точное исследование вопроса, этой же формулой (20) может быть представлено приближенно индуктивное сопротивление и полипланов — нужно лишь взять для них правильную величину A , зависящую от числа планов и их размаха λ (см. главу VI). Таким образом, все изложенное в этой главе может применяться и к моноплану и к полипланам.

Аналогично формуле (20) можем написать для среднего значения скоса

$$\Delta \alpha = A C_y. \quad (21)$$

Воспользуемся этими соотношениями для вывода способа, позволяющего переходить от одного размаха к другому.

Мы видели, что, пользуясь формулой (20), можно выделить профильное сопротивление крыла. Для этого достаточно вычесть из абсцисс точек кривой Лилиентала (фиг. 15) величины $C_i = \frac{2}{\pi \lambda} C_y^2$. Это мо-



Фиг. 15 и 16.

жет быть сделано графически. Откладывая на той же диаграмме величину C_p в зависимости от C_y , мы получим „кривую профильного сопротивления“. Так как у крыла бесконечного размаха индуктивное

сопротивление равно нулю, то эта же кривая будет представлять собою и полярную кривую Лилиенталя для крыла бесконечного размаха.

У хороших крыльев кривая профильного сопротивления идет на лётных углах почти параллельно оси C_y . Качество $\left(\frac{C_y}{C_x}\right)$ у крыла бесконечного размаха достигает значения 50 и даже 70.

Однако, если мы перейдем от точки D, соответствующей углу атаки α опытной кривой, к точке D₁ профильного сопротивления (т.-е. для $\lambda = \infty$), то угол атаки будет в точке D₁ уже другой. Это произойдет вследствие того, что в первом случае существовал скос потока

$$\Delta\alpha = A C_y.$$

Для получения одинаковых величин C_y необходимо в обоих случаях иметь одинаковые истинные углы атаки. В первом случае истинный угол атаки был $\alpha - \Delta\alpha$. Так как на кривой Лилиенталя углы атаки отмечаются обычно в виде кружков с цифрами, то при переходе к другому размаху эта разметка должна изменяться. Если желают избежать отметок с дробными углами атаки, то нужно отыскать новые C_y , соответствующие бесконечному размаху, при тех же углах атаки, как и у конечного крыла.

Для этого всего удобнее воспользоваться диаграммой, дающей C_y в зависимости от α (см. фиг. 16). На этой диаграмме легко нанести величину скоса потока по формуле (13')

$$\Delta\alpha^\circ = 57,3 \frac{2}{\pi\lambda} C_y = \frac{37,5}{\lambda} C_y. \quad (13')$$

На диаграмме эта зависимость представится прямою линиею ОВ, для проведения которой достаточно вычислить значение $\Delta\alpha^\circ$ для одного какого-либо значения C_y (обычно C_y берут равным 0,5, тогда $\Delta\alpha^\circ = \frac{18,25}{\lambda}$).

Если теперь все точки кривой C_y сместить влево на соответствующие их C_y величины $\Delta\alpha^\circ$, то полученная так на фиг. 16 пунктирная кривая и даст C_y в зависимости от α для крыла бесконечного размаха. Справедливость этого построения следует из того, что истинные углы атаки $\alpha - \Delta\alpha$ у конечного крыла будут равны углам атаки бесконечного.

Имея же новую кривую C_y в зависимости от α , легко сделать на кривой Лилиенталя (фиг. 15) новую разметку углов атаки. Таким образом, точка D перейдет в точку D_{II}.

На диаграммах фиг. 15 и 16 соответственные точки обозначены одними и теми же буквами.

Теория крыльев бесконечного размаха, которую мы здесь не излагаем¹⁾, указывает, что в идеальном случае наклон линии C_y к оси α будет вполне определенным и независимым от формы профиля, а именно:

$$\frac{dC_y}{d\alpha} = \pi.$$

Беря угол атаки в градусах, получим:

$$\frac{dC_y}{d\alpha^\circ} = \frac{\pi}{57,3} = 0,0548.$$

Опыт показывает, что при описанном пересчете продувок на бесконечный размах получается несколько меньшая величина для $\frac{dC_y}{d\alpha^\circ}$, чем это требуется теорией. Объясняется это тормозящим действием на поток сил поверхностного трения, что уменьшает циркуляцию вокруг крыла и, следовательно, и подъемную силу. Кроме того, это происходит еще от неточности излагаемой здесь теории, исходящей из среднего значения скоса потока.

На практике чаще приходится переходить не к бесконечному размаху, а к конечному, но другой величины, чем тот, который был взят во время опыта. Пусть во время опыта при угле атаки α_1 был перекося $\Delta\alpha_1$, соответствующий размаху λ . Мы хотим сделать переход к размаху λ_2 , при этом мы исходим из равных истинных углов атаки, т.-е.

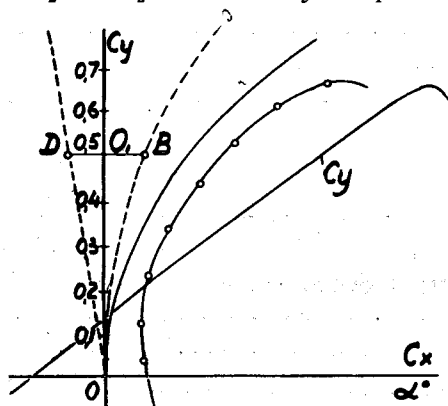
$$\alpha_1 - \Delta\alpha_1 = \alpha_2 - \Delta\alpha_2, \quad (22)$$

где α_2 и $\Delta\alpha_2$ соответствуют размаху λ_2 . При равных истинных углах атаки

$$C_{y1} = C_{y2} = C_y. \quad (23).$$

Перестраиваем сперва кривую C_y (см. фиг. 17). Нам придется теперь переносить точки этой кривой не на полную величину перекося как для $\lambda = \infty$, а лишь на разность скосов потока в обоих случаях. Из равенства (22) получаем

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_2, \quad (24)$$



Фиг. 17.

¹ См. Н. Е. Жуковский. Теоретические основы воздухоплавания. 2-е издание. Стр. 141.

так как

$$\Delta\alpha_1 = A_1 C_{y1} = A_1 C_y \text{ и } \Delta\alpha_2 = A_2 C_{y2} = A_2 C_y,$$

то

$$\alpha_1^\circ - \alpha_2^\circ = C_y (A_1 - A_2). 57,3. \quad (25)$$

Для моноплана, следовательно, получим:

$$\alpha_1^\circ - \alpha_2^\circ = C_y \left(\frac{2}{\pi\lambda_1} - \frac{2}{\pi\lambda_2} \right). 57,3. \quad (26)$$

Совершенно аналогично и на кривой Лилиенталья мы должны будем вычесть не полное индуктивное сопротивление, а разность индуктивных сопротивлений для размахов λ_1 и λ_2 , т.е.

$$C_{i1} - C_{i2} = C_y^2 (A_1 - A_2),$$

что для моноплана даст:

$$C_{i1} - C_{i2} = C_y^2 \left(\frac{2}{\pi\lambda_1} - \frac{2}{\pi\lambda_2} \right). \quad (28)$$

Таким образом, пересчет крыла с одного размаха на другой производится очень легко при помощи двух кривых — Лилиенталья и кривой C_y в зависимости от α .

Вследствие этого Центральный Аэро-Гидродинамический Институт НТО ВСНХ и принял за нормальные диаграммы испытаний крыльев эти совмещенные кривые (см. фиг. 17).

Для облегчения расчетов мы приводим здесь таблицу I значений $\Delta\alpha^\circ$ и C_i для различных размахов при $C_y = 0,5$. Переходя от размаха λ_1 к λ_2 , берем по таблице разности

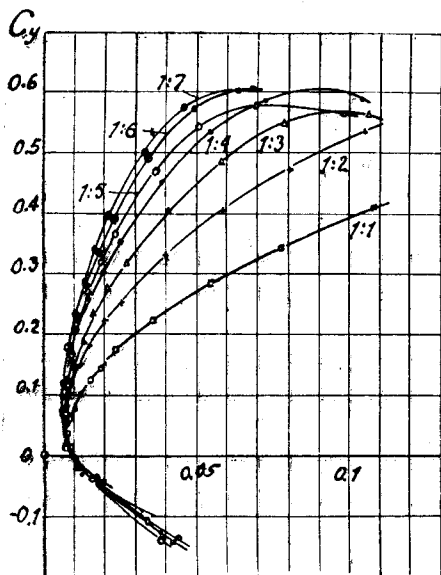
$$\Delta\alpha_1^\circ - \Delta\alpha_2^\circ \text{ и } C_{i1} - C_{i2}$$

и наносим на диаграмму точки В и D, при чем $OO_1 = 0,5$; $O_1 D = \Delta\alpha_1^\circ - \Delta\alpha_2^\circ$ и $O_1 B = C_{i1} - C_{i2}$. Затем проводим через D прямую OD, а через B — параболу ВО. Далее перестраиваем кривые уже описанным приемом при помощи циркуля. При этом центр давления (или C_m) следует за своим C_y , так как они оба зависят лишь от α ист.

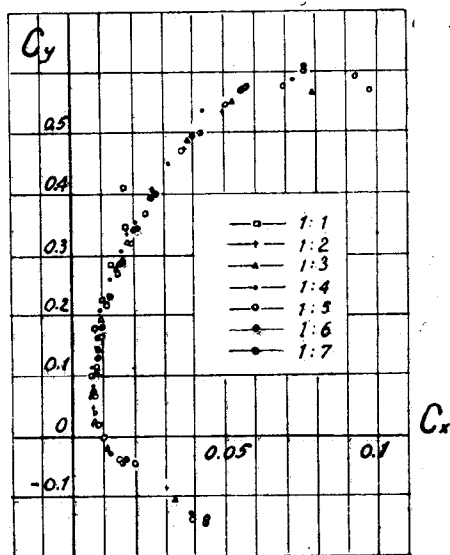
Т а б л и ц а I.
Моноплан. $C_y = 0,5$.

λ	$\Delta\alpha^\circ$	C_i	λ	$\Delta\alpha^\circ$	C_i
1	18.25	0.1590	5.5	3.32	0.0290
1.5	12.15	0.1060	6	3.04	0.0265
2	9.15	0.0795	6.5	2.81	0.0245
2.5	7.31	0.0637	7	2.61	0.0227
3	6.08	0.0530	8	2.28	0.0199
3.5	5.22	0.0455	10	1.83	0.0159
4	4.56	0.0398	12	1.52	0.0133
4.5	4.06	0.0354	15	1.22	0.0106
5	3.65	0.0318	20	0.92	0.0079

В виду практической важности таких пересчетов Геттингенской лабораторией была произведена экспериментальная проверка этой теории, для чего были изготовлены 7 крыльев одинакового профиля с размахами $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ и испытаны на одной и той же скорости потока, равной 30 м/сек. Получилось семейство кривых Лиллиенталя, изображенное на фиг. 18. Затем по описанному способу был сделан пересчет всех опытных „точек“ на размах $\lambda = 5$. На фиг. 19 изображены полученные таким образом точки. В случае верности тео-



Фиг. 18.



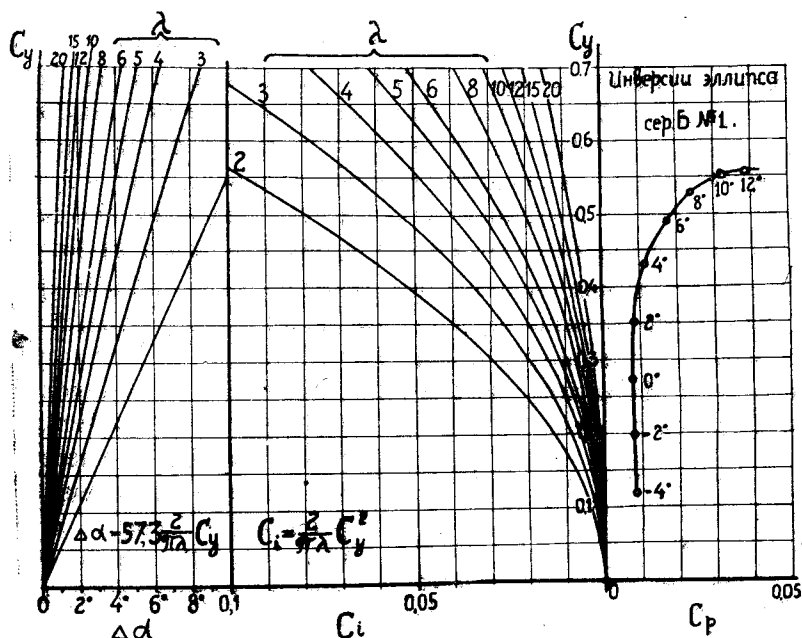
Фиг. 19.

рии точки эти должны были бы лечь на одну кривую, — это и оказалось на самом деле, и теория вполне оправдалась для моноплана. Лишь для размахов $\lambda = 1$ и 2 получаются хотя и небольшие, но все же заметные отклонения. Однако, на практике такие размахи употребляются лишь у стабилизаторов и рулей, и следовательно, формулы (26) и (28) дают вполне достаточную точность для необходимых на практике вычислений по пересчету крыльев на разные размахи. При размахе $\lambda = 1$ большая ошибка получается лишь для сопротивления (до 40%), а подъемная сила и угол атаки дают почти точный результат.

Так как при расчете рулей обычно сопротивлением не интересуются, то и для пересчета рулей можно пользоваться теми же формулами, как и для крыльев.

Профессор Юнкерс предложил строить полярные кривые для крыльев таким образом, что на правой части диаграммы откладывается лишь профильное сопротивление, а слева — индуктивное для разных относительных размахов λ (см. фиг. 20). Тогда полное сопротивление найдется прямо циркулем, как сумма индуктивного и профильного для каждого заданного C_y и λ . Однако, углы атаки должны отыскиваться на этой диаграмме дополнительными вычислениями, так как для каж-

дого λ будет существовать свой скос, — его мы также нанесли на диаграмму фиг. 20, где он изобразится пучком прямых. Разметка профильного сопротивления по углам атаки соответствует здесь бесконечному размаху.



Фиг. 20.

При применении таких расчетов к аэроплану возникает вопрос: что считать за размах самолета, — просто ли расстояние между концами крыльев, или же это расстояние минус ширина фюзеляжа? Опыты показали, что фюзеляж в присутствии крыльев даст подъемную силу, близкую к той, какая получилась бы от вырезанного им участка крыла и, следовательно, за размах самолета следует принимать расстояние между концами крыльев. Гораздо сильнее влияют на крыло ничем незаполненные вырезы, — подробнее см. в главе XVI.

ГЛАВА V.

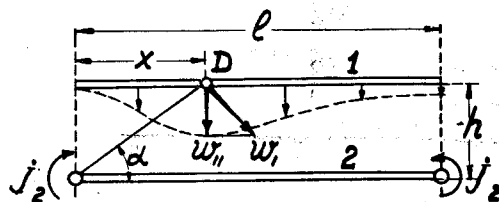
Применение теории индукции к расчету полипланов.

В случае, если у нас имеется несколько крыльев, произвольно расположенных в пространстве, то при набегании на них потока воздуха каждое крыло разовьет некоторую подъемную силу и силу сопротивления, которые будут зависеть не только от него самого, но и от величины и расположения соседних крыльев.

Влияние крыльев друг на друга называется их индукцией. При подсчете этого влияния крылья заменяются вихревыми шнурами, идущими внутри крыльев и выходящими из них наружу в виде вихревых усов. Эти вихри сообщают жидкости дополнительное движение и создают у отдельных крыльев скос потока и изменение скорости набе-

гания. Для упрощения расчетов пользуются гидродинамическим принципом „независимости действия вихрей“ и исследуют влияние каждого крыла на каждое в отдельности, а затем суммируют их действие. Следовательно, нужно лишь разобрать индукцию для двух крыльев. Пусть мы исследуем верхнее крыло; отметим его и все относящиеся к нему величины индексом 1 и разберем какие скорости вызовет в любой его точке крыло 2 (все его величины с индексом 2). Нам придется взять какую-нибудь точку у крыла 1 и определить, какую вертикальную скорость w и горизонтальную ΔV вызовут в ней окружающие вихри, и затем найти среднюю по размаху скорость. Вихри J_1 нам уже известны, — они дадут среднюю скорость по формуле (7) или (11). Это самоиндукция крыла — ею нам не придется теперь заниматься.

Мы здесь не будем делать подробный вывод общей формулы влияния, ввиду его сложности, а прямо дадим далее готовый результат, найденный Бетцем. Но чтобы иллюстрировать ход рассуждений при выводе этой формулы, мы сделаем вывод влияния вихревых усов нижнего плана на верхний в частном случае, когда размахи их равны



Фиг. 21.

и нет выноса верхнего по отношению к нижнему. Пусть расстояние между крыльями будет h . Разберем действие левого полувихря с циркуляцией J_2 на точку верхнего крыла D , лежащую на расстоянии x от левого края верхнего

крыла (см. фиг. 21). Вихрь вызовет скорость $w' = \frac{J_2}{4\pi r}$ по формуле (3).

Проекция w'' этой скорости на вертикаль найдется так:

$$w'' = w' \cos \alpha = \frac{J_2}{4\pi r} \cos \alpha,$$

где α — угол, обозначенный на чертеже. Легко видеть, что

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

и

$$r = \sqrt{x^2 + h^2}.$$

Подставляя эти величины в предыдущую формулу, получим:

$$w'' = \frac{J_2}{4\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + h^2}.$$

Ищем среднюю по верхнему крылу скорость от двух нижних вихрей ¹⁾:

$$w = 2 \frac{1}{l} \int_0^l w'' dx = 2 \frac{J_2}{4 \pi l} \int_0^l \frac{x dx}{h^2 + x^2} = \frac{J_2}{2 \pi l} \ln \sqrt{1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2} \quad (29)$$

Если сравнить полученную формулу с формулой (7), дающей скорость от самоиндукции, то увидим, что они отличаются лишь коэффициентом влияния. Там $\varepsilon = 4$, здесь же

$$\varepsilon = \ln \sqrt{1 + \left(\frac{l}{h}\right)^2} = 2,3 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{l}{h}\right)^2} \quad (29')$$

Примем следующие обозначения: w_{12} будет обозначать скорость у крыла 1, вызванную крылом 2; ε_{12} —коэффициент влияния на 1 крыло крыла 2; l_1 —размах 1-го и l_2 —2-го и т. д. Тогда мы можем написать в общем случае для средних скоростей w_{12} и w_{21} формулы:

$$\left. \begin{aligned} w_{12} &= \frac{J_2 \varepsilon_{12}}{2\pi l_1} = \frac{C_{y2} b_2}{2\pi l_1} \cdot \varepsilon_{12} V \\ w_{21} &= \frac{J_1 \varepsilon_{21}}{2\pi l_2} = \frac{C_{y1} b_1}{2\pi l_2} \cdot \varepsilon_{21} V \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Соответственные скосы потока будут

$$\left. \begin{aligned} \Delta \alpha_{12} &= \frac{w_{12}}{V} = \frac{C_{y2} b_2}{2\pi l_1} \cdot \varepsilon_{12} \\ \Delta \alpha_{21} &= \frac{w_{21}}{V} = \frac{C_{y1} b_1}{2\pi l_2} \cdot \varepsilon_{21} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

В случае полиплана величина скоса может быть и положительной и отрицательной. Положительное значение скоса соответствует скорости w , направленной вниз.

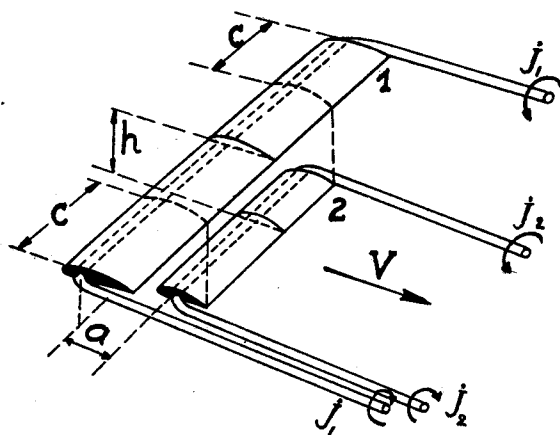
¹⁾ Здесь мы считаем, что расстояние между вихрями равно размаху крыльев, так как влияние отрезков e на величину w (см. фиг. 11) будет ничтожно малым в случае биплана.

Коэффициенты влияния ε следует вычислять по формулам Бетца, которые, как уже было упомянуто, даем для общего случая без вывода. В них h обозначает расстояние между планами, a — вынос верхнего 1-го по отношению к нижнему и $c = \frac{1}{2}(l_1 - l_2)$ — боковой свес крыла 1 над 2, а $l = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$ — средний размах (см. фиг. 22, 23 и 24)¹⁾. Тогда оказывается:

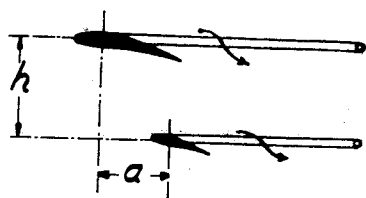
$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{12} &= l \ln \frac{\sqrt{a^2 + l^2 + h^2} + a}{\sqrt{a^2 + c^2 + h^2} + a} - \frac{a}{a^2 + h^2} \left(\sqrt{a^2 + l^2 + h^2} - \sqrt{a^2 + c^2 + h^2} \right) \\ \varepsilon_{21} &= l \ln \frac{\sqrt{a^2 + l^2 + h^2} - a}{\sqrt{a^2 + c^2 + h^2} - a} + \frac{a}{a^2 + h^2} \left(\sqrt{a^2 + l^2 + h^2} - \sqrt{a^2 + c^2 + h^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Складывая по принципу независимости отдельные влияния, получим полный снос потока перед крыльями 1, 2, 3 и т. д.

$$\left. \begin{aligned} \Delta \alpha_1 &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l_1} \left(\varepsilon_{11} C_{y1} b_1 + \varepsilon_{12} C_{y2} b_2 + \dots + \varepsilon_{1n} C_{yn} b_n \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l_1} \sum_1^n \varepsilon_{1m} C_{ym} b_m \\ \Delta \alpha_2 &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l_2} \left(\varepsilon_{21} C_{y1} b_1 + \varepsilon_{22} C_{y2} b_2 + \dots + \varepsilon_{2n} C_{yn} b_n \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l_2} \sum_2^n \varepsilon_{2m} C_{ym} b_m \end{aligned} \right\} \quad (33)$$



Фиг. 22.



Фиг. 23.

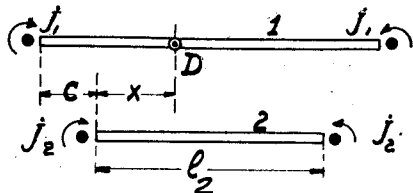
Здесь ε_{11} , ε_{22} и т. д. обозначают коэффициент для самоиндукции $\cong 4$. Буквою m мы здесь обозначаем текущий номер крыла, а буквою n — число крыльев.

Кроме сноса потока, соседние крылья будут вызывать друг у друга изменение горизонтальной скорости набегающего на них потока.

¹⁾ Если за 1 крыло принять крыло меньшего размаха, то тогда величины свеса и выноса будут отрицательными. На фиг. 24 ошибочно поставлено l вместо l_2 : величина $l = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$.

Вследствие этого входящие в формулу (33) коэффициенты подъемной силы C_y должны вводиться уже исправленными на влияние увеличенной или уменьшенной скорости набегания воздуха. Мы будем отмечать арабскими цифрами окончательные C_y , входящие в формулы (30), (31) и (33).

Если бы мы, определив скос потока у какого-либо крыла, нашли у него истинный угол атаки, то мы могли бы найти по кривой его испытания величину C_y , соответствующую этому углу. Будем отмечать найденные так величины римскими цифрами, например: для крыла 1-го имели бы C_{yI} , для 2-го C_{yII} и т. д.



Фиг. 24.

По исследованиям Бетца оказывается, что дополнительную горизонтальную скорость ΔV от индукции можно находить у парных крыльев по формулам:

$$\frac{\Delta V_{12}}{V} = \mu_{12} \frac{C_{y2} b_2}{2\pi l_1} \quad (34)$$

и

$$\frac{\Delta V_{21}}{V} = \mu_{21} \frac{C_{y1} b_1}{2\pi l_2}, \quad (35)$$

где

$$\mu_{12} = -\mu_{21} = \frac{h}{l_1^2 + a^2} \left(\sqrt{a^2 + l_1^2 + h^2} - \sqrt{a^2 + c^2 + h^2} \right). \quad (36)$$

Полное изменение скорости у первого крыла обозначим

$$\frac{\Delta V_1}{V},$$

тогда при n крыльях будем иметь:

$$\frac{\Delta V_1}{V} = \frac{n}{1} \mu_{1m} \frac{C_{ym} b_m}{2\pi l_1} = \frac{1}{2\pi l_1} \frac{n}{1} C_{ym} b_m \mu_{1m}. \quad (36')$$

Эта скорость изменит подъемную силу крыла ¹⁾ в отношении:

$$\frac{(V + \Delta V_1)^2}{V^2} = 1 + 2 \frac{\Delta V_1}{V} + \left(\frac{\Delta V_1}{V} \right)^2.$$

1) Влиянием этой скорости на угол скоса мы пренебрегаем ввиду ее малости.

Обычно величина ΔV_1 мала по сравнению с V и величиной $\left(\frac{\Delta V_1}{V}\right)^2$ можно пренебречь. Так как мы относим весь эффект действия воздуха на крылья к скорости V , то удобнее рассматривать изменение силы от скорости, как результат изменения коэффициента C_y и писать:

$$C_{y1} = C_{yI} \left(1 + 2 \frac{\Delta V_1}{V}\right) \text{ и т. д.} \quad (37)$$

Вводя влияния отдельных крыльев, получим, например, для четырех-плана:

$$\left. \begin{aligned} C_{y1} &= C_{yI} \left[1 + \frac{1}{\pi l_1} \left(\mu_{12} C_{y2} b_2 + \mu_{13} C_{y3} b_3 + \mu_{14} C_{y4} b_4 \right) \right] \\ C_{y2} &= C_{yII} \left[1 + \frac{1}{\pi l_2} \left(-\mu_{12} C_{y1} b_1 + \mu_{23} C_{y3} b_3 + \mu_{24} C_{y4} b_4 \right) \right] \\ &\dots \dots \dots \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Если бы мы захотели определить полную подъемную силу P всей коробки и полное ее индуктивное сопротивление Q_i , то мы должны были бы умножить первое равенство на $\rho S_1 V^2 = \rho l_1 b_1 V^2$, второе на $\rho S_2 V^2 = \rho l_2 b_2 V^2$ и т. д., и затем все равенство сложить. Получилось бы:

$$P = \rho (C_{y1} S_1 + C_{y2} S_2 + \dots C_{yn} S_n) V^2 = \rho (C_{yI} l_1 b_1 + C_{yII} l_2 b_2 + \dots) V^2. \quad (39)$$

Как видно, все члены с μ сократились. Это означает, что при определении полной подъемной силы можно вести все вычисления, не вводя влияния скоростей ΔV ; — C_{yI} и C_{yII} здесь равноценны. Если же мы интересуемся распределением силы между отдельными крыльями, то тогда необходимо вводить в расчеты величину μ . Найдем теперь индуктивное сопротивление как отдельного крыла, так и всей коробки. Для отдельных планов, например, первого, имеем:

$$\begin{aligned} C_{i1} &= C_{y1} \cdot \Delta \alpha_1 = C_{yI} \left(1 + \frac{2 \Delta V_1}{V} \right) \Delta \alpha_1 = \\ &= C_{yI} \left[1 + \frac{2}{2\pi l_1} \sum_{m=1}^n \mu_{1m} b_m C_{ym} \right] \cdot \frac{1}{2\pi l_1} \sum_{m=1}^n \varepsilon_{1m} b_m C_{ym}, \end{aligned}$$

видим, что получается весьма сложная зависимость. Однако можно вывести любопытное свойство индуктивного сопротивления, если рассматривать лишь парные крылья.

Мы имеем тогда:

$$C_{i12} = C_{y1} \Delta \alpha_{12} = \varepsilon_{12} \frac{C_{y1} C_{y2} b_2}{2\pi l_1}$$

и

$$C_{i21} = C_{y2} \Delta \alpha_{21} = \varepsilon_{21} \frac{C_{y1} C_{y2} b_1}{2\pi l_2}$$

Ищем силы Q_i , умножая коэффициенты соответственно на

$$\rho V^2 S_1 = \rho l_1 b_1 V^2 \text{ и } \rho V^2 S_2 = \rho l_2 b_2 V^2.$$

Получаем:

$$\left. \begin{aligned} Q_{i12} &= \varepsilon_{12} \frac{C_{y1} C_{y2} b_1 b_2}{2\pi} \rho V^2 \\ Q_{i21} &= \varepsilon_{21} \frac{C_{y1} C_{y2} b_1 b_2}{2\pi} \rho V^2 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Полное сопротивление пары крыльев от взаимного влияния найдется как их сумма:

$$Q_{i12} + Q_{i21} = \rho \frac{C_{y1} C_{y2} b_1 b_2}{2\pi} (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) V^2;$$

подставляем сюда величины ε_{12} и ε_{21} по формулам (32) Бетца и находим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} &= \ln \frac{\sqrt{a^2 + l^2 + h^2} + a}{\sqrt{a^2 + c^2 + h^2} + a} + \ln \frac{\sqrt{a^2 + l^2 + h^2} - a}{\sqrt{a^2 + c^2 + h^2} - a} = \\ &= \ln \frac{(\sqrt{a^2 + l^2 + h^2} + a)}{(\sqrt{a^2 + c^2 + h^2} + a)} \cdot \frac{(\sqrt{a^2 + l^2 + h^2} - a)}{(\sqrt{a^2 + c^2 + h^2} - a)} = \ln \frac{l^2 + h^2}{c^2 + h^2} \end{aligned} \quad (40)$$

Получаем очень важный вывод: индуктивное сопротивление пары крыльев не зависит от их выноса, если C_{y1} и C_{y2} заданы. Полное индуктивное сопротивление всей коробки получается суммированием таких пар и, следовательно, оно не зависит от продольного размещения крыльев. Всякую коробку можно привести к коробке без выноса, у которой центральные вихри, заменяющие крылья, будут лежать в одной плоскости, перпендикулярной к направлению полета.

Это положение называется первой теоремой Мунка.

Легко вывести весьма интересное свойство такой коробки крыльев, а именно у нее

$$Q_{i12} = Q_{i21},$$

т.-е. индуктивные сопротивления пары крыльев равны друг другу.
Для доказательства делаем в формулах (32) вынос $a = 0$, тогда:

$$\varepsilon_{12} = l \pi \frac{\sqrt{l^2 + h^2}}{\sqrt{c^2 + h^2}}$$

и

$$\varepsilon_{21} = l \pi \frac{\sqrt{l^2 + h^2}}{\sqrt{c^2 + h^2}}$$

или

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21};$$

так как

$$Q_{i12} = \varepsilon_{12} \frac{C_{y1} C_{y2} b_1 b_2}{2 \pi} \rho V^2 \text{ и } Q_{i21} = \varepsilon_{21} \frac{C_{y1} C_{y2} b_1 b_2}{2 \pi} \rho V^2,$$

то требуемое доказано.

Это свойство парных крыльев коробки без выноса называется второю теоремою Мунка.

Полное индуктивное сопротивление биплана без выноса получится, следовательно, в виде

$$Q_i = Q_{i11} + 2 Q_{i12} + Q_{i22}.$$

Следует еще заметить, что при переходе от коробки с выносом к эквивалентной коробке без выноса необходимо сохранить у крыльев неизменные подъемные силы P_1 и P_2 или коэффициенты C_{y1} и C_{y2} . Для этого, при таком переходе, приходится несколько изменять углы атаки крыльев, что может быть произведено без особых затруднений по основным формулам Бетца.

Во многих случаях практики влиянием выноса можно совершенно пренебречь, так как оно обычно очень мало.

Еще одну очень важную теорему вывел Мунк — всякую систему крыльев можно заменить эквивалентным монопланым крылом определенного размаха. Эта теорема оправдывает применение и для полипланов формулы (26) для среднего скоса потока и формулы (25) для полного индуктивного сопротивления; мы здесь этого вопроса разбирать не будем.

Для практических применений важно отметить еще то обстоятельство, что величина профильного сопротивления очень мало зависит от расположения крыльев. Величину C_p можно считать с достаточной точностью независимой от изменения скоростей набегающего воздуха у отдельных крыльев, т.-е. от факторов μ . В случае биплана у верхнего крыла скорость увеличится, а у нижнего уменьшится, в результате средняя величина C_p будет соответствовать почти точно неизменной скорости набегающего.

На практике удобно вести вычисление подъемной силы и сопротивления сложной коробки по методу последовательных приближений, а именно следующим образом.

1) Считаем сперва, что все крылья работают независимо одно от другого, т.е. как монопланы того или иного размаха и по их углам атаки находим C_{y1} , C_{y2} и т. д.

2) Вычисляем для каждой пары крыльев коэффициенты влияния ϵ и μ , зависящие лишь от геометрических соотношений коробки крыльев и угла атаки по формулам (32) и (36) ¹⁾.

3) Находим перекося потока по формуле (33) и изменение скорости потока по формуле (36') перед каждым крылом.

4) Зная перекося, определяем истинные углы атаки и по ним коэффициенты C_{y1} , C_{y11} и т. д. для бесконечного размаха. Затем находим

$$C_{y1} = C_{y1} \left(1 + \frac{2\Delta V_1}{V} \right); C_{y2} = C_{y11} \left(1 + \frac{2\Delta V_2}{V} \right) \text{ и т. д.}$$

5) Вводим найденные так коэффициенты C_y снова в формулы (33) и (36') и определяем уже более точные $\Delta\alpha$ ²⁾. После нескольких пересчетов $\Delta\alpha$ перестает уже заметно изменяться, — эти значения и будут истинными.

6) Вычисляем по окончательным перекосям истинные углы атаки всех планов, находим C_y (при $\lambda = \infty$) и по ним индуктивные сопротивления отдельных планов, например

$$C_{i1} = C_{y1} \Delta\alpha_1 \text{ и } Q_{i1} = \rho C_{i1} S_1 V^2 \text{ и т. д.}$$

7) Вычисляем профильное сопротивление каждого плана, не забывая ввести влияние изменения скорости по формуле (37) т.е.

$$C_{p1} = C_{p1} \left(1 + \frac{2\Delta V_1}{V} \right) \text{ и т. д.};$$

$$Q_{p1} = \rho C_{p1} S_1 V^2 \text{ и т. д.}$$

8) Далее производим суммирование сил, действующих на отдельные крылья, и находим величину равнодействующей.

9) По истинным углам атаки отдельных крыльев находим центры давления каждого крыла и отыскиваем далее по правилам статики положение равнодействующей всех сил.

10) Это вычисление делаем для нескольких лётных углов. Полученные данные позволяют построить кривую Лилиентала для всей коробки и изучить перемещение равнодействующей ³⁾.

1) Величины a и h берутся относительно потока и, следовательно, для разных углов атак они будут иметь различное значение.

2) Величины C_y следует во время вычисления исправлять, беря некоторые средние между предположенными и полученными.

3) Вместо вычисления истинных углов атаки и решения задачи с помощью крыльев бесконечного размаха, можно расчет вести исходя и из монопланнх крыльев, вычисляя лишь дополнительные к монопланному скосу скосы от влияния. Однако, на практике такой прием ведет нередко к различным ошибкам.

Следовательно, имея монопланную продувку какого-либо крыла, мы можем при помощи теории индуктивного сопротивления определить путем вычислений величину и точку приложения равнодействующей аэродинамических сил, действующих на любую комбинацию любого числа таких крыльев.

Опыт показывает, что подобные расчеты дают точность, вполне достаточную для многих практических приложений.

Так как всякая коробка крыльев может быть приведена по Мунку к монопланному крылу, то индуктивное сопротивление коробки должно представиться на кривой Лилиенталя параболой второго порядка. Вследствие этого, при вычислении индуктивного сопротивления сложной коробки, расчет можно было бы вести лишь для одного угла атаки и для других углов определять его проведением на диаграмме параболы индуктивного сопротивления.

Однако, профильное сопротивление коробки крыльев может изменяться при разных углах атаки и собственно лишь для его учета приходится вести описанное вычисление для нескольких углов атаки. Лишь в случае, если все крылья сложной коробки будут иметь профильное сопротивление, мало зависящее от их углов атаки, можно ограничиваться при расчете коробки лишь одним углом атаки.

В случае биплана величину скоса можно найти также и аналитически. Для простоты расчета откинем малое влияние скорости ΔV^1 . Скос потока у крыльев может быть представлен так:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \alpha_{12} &= \frac{\varepsilon_{12} b_2}{2\pi l_1} C_{y2} = k_1 C_{y2} \\ \Delta \alpha_{21} &= \frac{\varepsilon_{21} b_1}{2\pi l_2} C_{y1} = k_2 C_{y1} \end{aligned} \right\} \quad (31')$$

Здесь

$$k_1 = \frac{\varepsilon_{12} b_2}{2\pi l_1} \text{ и } k_2 = \frac{\varepsilon_{21} b_1}{2\pi l_2};$$

они зависят лишь от геометрических соотношений коробки крыльев.

Коэффициенты подъемной силы крыльев „как монопланов“ могут быть, с достаточной точностью, представлены в виде:

$$\begin{aligned} C_{y1} &= C_1 (\alpha_{01} + \alpha_1) \\ C_{y2} &= C_2 (\alpha_{02} + \alpha_2), \end{aligned}$$

¹⁾ Более точный расчет с учетом изменения горизонтальной скорости потока изложен конце этой книги, см. Дополнение к гл. V.

где α_{01} и α_{02} — углы атаки нулевой подъемной силы (по абсолютной величине), а коэффициенты

$$C_1 = \frac{d C_{y1}}{d \alpha_1} \text{ и } C_2 = \frac{d C_{y2}}{d \alpha_2}$$

дают тангенсы наклона линий C_y , принимаемых здесь за прямые к оси α . В случае биплана угол атаки крыльев уменьшится по сравнению с монопланом на величину скоса, следовательно

$$\left. \begin{aligned} C_{y1} &= C_1 (\alpha_{01} + \alpha_1 - \Delta \alpha_{12}) \\ C_{y2} &= C_2 (\alpha_{02} + \alpha_2 - \Delta \alpha_{21}) \end{aligned} \right\} \quad (31'')$$

Далее, по формулам (31') снова находим скосы и получаем два уравнения с двумя неизвестными $\Delta \alpha_{12}$ и $\Delta \alpha_{21}$

$$\Delta \alpha_{12} = k_1 C_2 (\alpha_{02} + \alpha_2 - \Delta \alpha_{21})$$

$$\Delta \alpha_{21} = k_2 C_1 (\alpha_{01} + \alpha_1 - \Delta \alpha_{12})$$

Решая их, находим окончательно:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \alpha_{12} &= \frac{k_1 C_2 (\alpha_2 + \alpha_{02}) - k_1 k_2 C_1 C_2 (\alpha_1 + \alpha_{01})}{1 - k_1 k_2 C_1 C_2} \\ \Delta \alpha_{21} &= \frac{k_2 C_1 (\alpha_1 + \alpha_{01}) - k_1 k_2 C_1 C_2 (\alpha_2 + \alpha_{02})}{1 - k_1 k_2 C_1 C_2} \end{aligned} \right\} \quad (31''')$$

Зная скосы, поступаем далее уже по известным приемам и находим по уравнениям 31'' коэффициенты подъемных сил C_{y1} и C_{y2} и, затем, определяем дополнительные к монопланам индуктивные сопротивления:

$$\left. \begin{aligned} C_{i12} &= C_{y1} \Delta \alpha_{12} \\ C_{i21} &= C_{y2} \Delta \alpha_{21} \end{aligned} \right\} \quad (31''')$$

Таким образом, мы должны в этом способе сперва построить диаграммы (C_y, α) для каждого крыла как для моноплана с данными λ , найти α_0 и $C = \frac{d C_y}{d \alpha}$ и далее, по геометрическим соотношениям коробки крыльев вычислить k_1 и k_2 ; после этого находим скос по формуле (31''') и коэффициент индуктивного сопротивления по (31''').

Некоторая неточность всех этих вычислений происходит еще из-за замены всех присоединенных вихрей, заполняющих профиль, одним внутренним шнуром. В настоящее время ряд видных немецких теоретиков занят вопросом об учете влияния распределения вихрей по профилю крыльев на их индукцию.

ГЛАВА VI.

Приближенная формула для определения индуктивного сопротивления.

В предыдущей главе мы видели, что вычисление индуктивного сопротивления для сложной коробки планов требует хотя и простых, но довольно длинных вычислений.

Между тем, при различных предварительных расчетах и соображениях важно иметь простую формулу, позволяющую быстро находить приблизительную величину суммарного индуктивного сопротивления.

Понятно, что эти формулы будут лишь приблизительными — придется жертвовать точностью. Такие формулы были даны Бадером и Прандтлем. Особо удобна формула последнего. Оказывается, что приближенно можно считать, что эффект действия всех планов сводится к некоторому общему перекосу потока, который и отклонит подъемную силу на некоторый угол $\Delta\alpha$. Далее, угол перекоса оказывается пропорциональным подъемной силе всех крыльев. Теперь можно написать аналогично моноплану формулу:

$$Q_i = AP^2$$

или

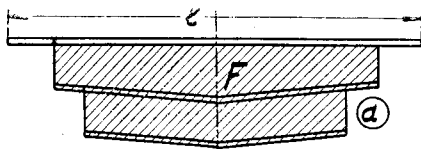
$$C_i = AC_y^2;$$

здесь C_i и C_y — средние величины для всей коробки планов так называемые „коэффициенты суммарного действия, получаю — по правилу смешения“, т.-е.

$$C_y = \frac{C_{y1} S_1 + C_{y2} S_2 + \dots + C_{yn} S_n}{S_1 + S_2 + \dots + S_n};$$

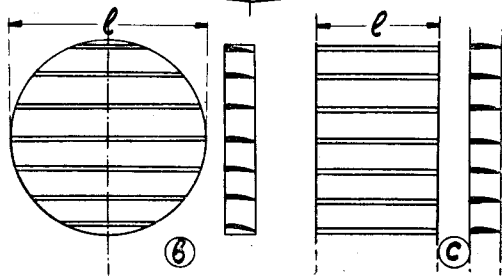
$$C_x = \frac{C_{x1} S_1 + \dots + C_{xn} S_n}{S_1 + \dots + S_n}. \quad (41)$$

Прандтль предложил следующую простую формулу:



$$C_i = \frac{2 S}{\pi l^2 + 4 F} C_y^2; \quad (42)$$

здесь S — общая площадь крыльев, l — наибольший размах и F — площадь, полученная суммированием всех кусков площади, заключенных на фиг. 25(a) между двумя соседними планами и двумя отвесными линиями из концов меньшего крыла¹⁾. Другими словами, в случае отсутствия у крыльев поперечного V площадь



Фиг. 25.

$$F = \sum lh,$$

где l размах меньшего из 2 соседних крыльев и h — расстояние между ними.

¹⁾ Ширина планов считается здесь у всех крыльев одинаковой.

Прандтль доказывает, что эта формула точна для моноплана, где $F=0$; далее она правильна и для полиплана, составленного из многих, точнее из бесконечного числа крыльев, у которых внешнее очертание по направлению полета есть круг (фиг. 25, в). В этом случае $4F = \pi l^2$ и, следовательно, C_i равно половине того, что получилось бы у моноплана с тем же S и l . Эта же формула справедлива еще для бесконечно растянутой в высоту системы крыльев с конечной всюду постоянной шириной — в этом случае первое слагаемое в знаменателе ур-ния (42) исчезает по сравнению со вторым (см. фиг. 25, с).

Прандтль произвел сравнение этой формулы с опытами Мунка в Гёттингенской лаборатории, — оказалось, что она дает очень хорошие результаты для бипланов. Вследствие этого Прандтль рекомендует формулу (42) для всех случаев, как приближенную. Из формулы (42) следует, что для полиплана

$$A = \frac{2S}{\pi l^2 + 4F} \quad (43)$$

Если взять частный случай, когда все планы имеют одинаковый размах l , ширину b и расстояние между ними равно ширине b , то при n планах получим:

$$\begin{aligned} S &= nbl \\ F &= (n-1)bl \\ \lambda &= \frac{l}{b} \end{aligned}$$

Тогда:

$$A = \frac{2n}{\pi \lambda + 4(n-1)} \quad (44)$$

Этой формулой очень удобно пользоваться при различных предварительных расчетах. Для облегчения пользования ею мы приводим таблицу II готовых значений для величины A .

Таблица II.

Величина A для разных λ .

n	$\lambda =$	3	4	5	6	7
1	Монопланы	0.213	0.160	0.127	0.106	0.0913
2	Бипланы	0.297	0.241	0.202	0.175	0.154
3	Трипланы	0.344	0.291	0.254	0.224	0.200
4	Четырехпланы	0.372	0.325	0.288	0.260	0.235

Продолжение таблицы II.

n	$\lambda = 8$	9	10	12	15	20	A
1	0.0800	0.0710	0.0639	0.0531	0.0426	0.0319	$\frac{2}{\pi\lambda}$
2	0.137	0.124	0.113	0.0955	0.0782	0.0598	$\frac{4}{\pi\lambda - 4}$
3	0.181	0.166	0.152	0.131	0.109	0.0847	$\frac{6}{\pi\lambda - 8}$
4	0.215	0.199	0.184	0.160	0.135	0.107	$\frac{8}{\pi\lambda - 12}$

Таблица II позволяет сделать целый ряд важных заключений напр., сравнить полипланы с монопланами. Если мы возьмем у моноплана размах $\lambda = 5$, то увидим, что для получения равного индуктивного сопротивления биплан должен иметь $\lambda \approx 8,7$, триплан — 12 и четырехплан — 15. Если мы зададимся определенной площадью крыльев и не будем стеснены высотой самолета, то во многих случаях полипланы могут оказаться выгоднее монопланов, — все зависит от того, покроет ли уменьшение индуктивного сопротивления от увеличения λ прирост вредных сопротивлений от стоек и троссов.

Хотя и мнение, что биплан аэродинамически хуже моноплана, справедливо лишь в том случае, когда сравниваются крылья с одинаковым относительным размахом $\lambda = \frac{l}{b}$. Биплан с большим относительным размахом может быть значительно лучше моноплана с малым λ .

ГЛАВА VII.

Индуктивное сопротивление аэродинамических труб.

Всем известно, какое огромное значение для постройки самолетов приобрели в настоящее время опытные данные о крыльях, фюзеляжах, винтах и т. д., публикуемые аэродинамическими лабораториями. Во время мировой войны спрос на эти исследования был так велик, что, напр., в Германии Гёттингенская лаборатория работала день и ночь в две смены.

Однако, слепое пользование опытными данными может иногда повести к большим ошибкам. Теория индуктивного сопротивления оказывается в этом отношении чрезвычайно полезною, так как она позволяет использовать опыт в более широких пределах, например, переходить к разным размахам и даже сложным комбинациям крыльев по испытанию одиночного монопланного крыла.

Очень важным применением индуктивного сопротивления является возможность „улучшать“ опытные данные, исключая побочные влияния. Уже давно выставлялось в аэродинамических лабораториях требование брать исследуемые модели возможно малыми по отношению к размерам трубы. Этим путем старались уменьшить влияние стенок в закрытых трубах и конечности сечения струи в открытых. Однако, точность измерений уменьшается с уменьшением размеров модели: приходилось искать некоторое компромиссное решение. Проф. Л. Прандтль показал, что даже при обычных размерах моделей влияние трубы является заметным фактором и им пренебрегать ни в коем случае нельзя.

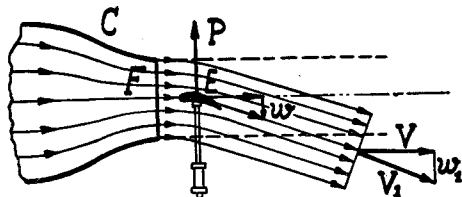
Оказалось, что это явление сводится к некоторому добавочному индуктивному сопротивлению, при чем в трубах открытых оно ухудшает крыло, а в закрытых оно его улучшает. Этим объяснился целый ряд противоречий в опытах, полученных в различных лабораториях.

Все исследования аэродинамических лабораторий в настоящее время „исправляются“ на влияние трубы. При пользовании же старыми опытами (до 1920—1922 г). приходится вводить такие поправки самим читателям.

Проф. Л. Прандтль вывел величину индуктивного сопротивления труб с помощью теории вихрей, — мы здесь для большей наглядности и простоты сделаем вывод элементарным приемом.

Рассмотрим сперва трубу со „свободную струей“ (см. фиг. 26).

Пусть из сопла С вылетает со скоростью V струя воздуха, имеющая площадь сечения F . Если модель отсутствует, то струя эта идет цилиндрической колонной, как это представлено на чертеже пунктиром.



Фиг. 26.

Когда же в потоке находится модель крыла Е, то струя отклонится вниз и окажет на модель давление, и в результате получится подъемная сила Р.

По закону действия и противодействия с такою же точно силою Р будет действовать и крыло на воздух по направлению книзу. Это давление вызовет у воздуха, находящегося под крылом, некоторое сжатие и сообщит ему некоторую скорость, направленную вниз. На некотором расстоянии за крылом все это давление обратится в скорость. Назовем эту окончательную скорость буквою w_1 .

Теперь мы можем сказать, что по закону импульса подъемная сила крыла Р должна равняться секундному количеству движения, сообщенного им воздуху. Назовем массу протекающего в 1 секунду через любое сечение трубы воздуха через m ; тогда имеем:

$$P = m w_1.$$

Секундную массу можно представить так:

$$m = \rho F V,$$

тогда

$$P = \rho F V w_1.$$

Отсюда

$$w_1 = \frac{P}{\rho F V}. \quad (45)$$

Однако, и у самого крыла будет существовать вертикальная скорость w . Легко доказать, что эта скорость будет равна лишь половине полной скорости w_1 , получающейся в далекой от крыла точке¹⁾. Для этого обратимся к энергии получаемой струею. Подъемная сила P произведет работу T , при этом

$$T = P w = m \cdot w_1 \cdot w.$$

Эта работа пойдет полностью на увеличение живой силы в отброшенной струе.

Перед набеганием на крыло живая сила струи была $\frac{m V^2}{2}$, после же пробегания около крыла она будет уже $\frac{m V_1^2}{2}$. Из скоростного прямоугольного треугольника получаем, считая горизонтальную проекцию скорости неизменной:

$$V_1^2 = V^2 + w_1^2.$$

Следовательно:

$$T = \frac{m V_1^2}{2} - \frac{m V^2}{2} = \frac{m}{2} (V^2 + w_1^2 - V^2) = \frac{m}{2} w_1^2.$$

Сравнивая оба выражения для энергии T , видим, что

$$w = \frac{w_1}{2}.$$

Возвращаясь к ур-ию (45), находим

$$w = \frac{P}{2 \rho F V}. \quad (46)$$

Эта скорость вызовет скос потока

$$\Delta \alpha = \frac{w}{V} = \frac{P}{2 \rho F V^2}. \quad (47)$$

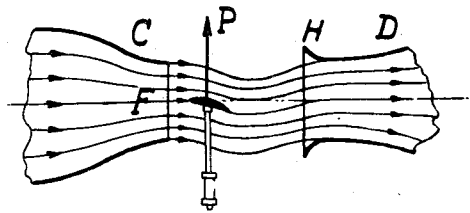
Скос же вызовет индуктивное сопротивление

$$Q_i = P \Delta \alpha = \frac{P^2}{2 \rho F V^3}. \quad (48)$$

Однако, все наше рассуждение было бы справедливо лишь для совершенно свободной струи, вытекающей в неограниченное пространство. Лишь в таком случае струя, пройдя крыло и отклоняясь вниз, могла бы течь по направлению скорости V_1 .

¹⁾ Точный вывод здесь довольно сложен (см. L. Prandtl, Tragflügeltheorie) и основан на рассмотрении давлений на границу струи. Мы здесь применяем тот прием рассуждений, каким пользуются в теории идеального пропеллера. Однако, он может быть применен здесь лишь с некоторыми натяжками.

В действительности трубы со свободною струей устраиваются так, как это изображено на фиг. 27. Воздух за крылом подсасывается в них при помощи вентилятора во всасывающую воронку Н диффузора D, вследствие этого вся струя как бы поворачивается вверх и скос у крыла уменьшается. Подробное исследование этого вопроса показывает, что подсасывающее действие воронки D оказывает на струю как бы давление, равное половине подъемной силы крыла. Следовательно, лишь половина импульса силы P должна быть принятою увеличением количества движения в струе.



Фиг. 27.

Таким образом, вертикальные скорости уменьшаются в два раза, и мы окончательно получим следующие формулы:

$$w = \frac{P}{4\rho F V^2} \quad (50)$$

$$\Delta\alpha = \frac{w}{V} = \frac{P}{4\rho F V^2} \quad (51)$$

$$Q_i = P\Delta\alpha = \frac{P^2}{4\rho F V^2} \quad (52)$$

Деля обе части последнего уравнения на $\rho S V^2$, получим:

$$C_i = \frac{1}{4} \cdot \frac{S}{F} \cdot C_y^2 \quad (53)$$

Следовательно, рабочие формулы для исправления опыта на влияние трубы будут таковы:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha &= 0,25 \frac{S}{F} \cdot C_y \\ C_i &= 0,25 \frac{S}{F} \cdot C_y^2 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Описанное здесь в простой схеме явление в действительности оказывается значительно сложнее, ибо на нем сказывается влияние кривизны струек воздуха и влияние изменения сечений трубы по длине.

Вихревая теория проф. Л. Прандтля дает для влияния круглой трубы с диаметром D выражение:

$$Q_i = \frac{P^2}{4\rho F V^2} \left[1 + \frac{3}{16} \left(\frac{l}{D} \right)^4 + \frac{5}{64} \left(\frac{l}{D} \right)^8 + \frac{175}{4096} \left(\frac{l}{D} \right)^{12} + \dots \right] \quad (55)$$

где l — размах крыла.

Как видим, оно отличается лишь множителем в квадратных скобках от выведенного нами ур-ния (52). Для обычных величин крыльев этот множитель близок к 1.

Для прямоугольного сечения получены следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha &= 0,274 \frac{S}{F} C_y \\ C_i &= 0,274 \frac{S}{F} C_y^2 \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Эти формулы дают заметную поправку и для обычных размеров моделей. Обычно $\frac{S}{F} \approx \frac{1}{15}$ и тогда скос потока в градусах будет $\Delta\alpha^\circ \approx C_y$:

это дает при полетных углах поправку около $1/3^\circ$ и на посадочных до $3/4^\circ$. Индуктивное сопротивление от трубы в этих условиях будет таково: $C_i = \frac{1}{60} C_y^2$. Если сравнить его с индуктивным сопротивлением

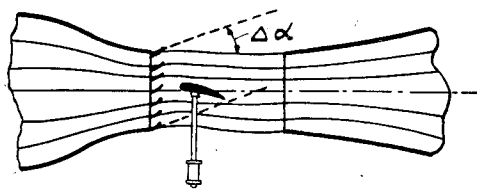
моноплана с размахом $\lambda = 6$, т.е. $C_i' = \frac{2}{\pi\lambda} C_y^2 \approx \frac{1}{9} C_y^2$, то видим, что влияние трубы дает около $1/7$ всего индуктивного сопротивления крыла:

$$\frac{C_i}{C_i'} = \frac{9}{60} \approx \frac{1}{7}.$$

Как видим, поправка получается весьма заметная.

Рассмотрим теперь, что получается у закрытых труб. Ясно, что струя здесь будет направлена стенками и на внешней ее поверхности скос потока не будет, однако, внутри струи скос получится. Мы и здесь не будем делать подробного вывода всех формул для этого случая, а применим следующее рассуждение.

Рассмотрим опять трубу со свободною струей (см. фиг. 27). Струя,



Фиг. 28

проходя крыло, отклонится на угол $\Delta\alpha$. Если мы теперь непосредственно перед крылом поместим направляющую решетку (вроде направляющего аппарата турбин), при том такую, что струя, выйдя из нее, пойдет

под углом $\Delta\alpha$ вверх (см. фиг. 28), то после набегания на крыло струя должна будет пойти горизонтально. Следовательно, искривления в струе уже не получится. Таким образом, действие этой решетки будет как бы эквивалентно действию трубы.

Действие же такой решетки на крыло определяется очень легко, — оно сводится к скосу потока под углом $\Delta\alpha$ вверх. Следовательно, угол $\Delta\alpha$ и коэффициент индуктивного сопротивления трубы для этого случая определяется по прежним формулам (51), (52), (54) и (56); только знаки у них будут обратные.

Окончательно получаем следующий вывод: труба открытая ухудшает крыло, давая потоку добавочный скос $\Delta\alpha$, направленный вниз; труба же закрытая дает улучшение крыльев, при чем скос тоже равен $\Delta\alpha$, но направлен вверх.

Ввиду большой важности таких поправочных формул многие лаборатории занимались их проверкою. Труба со свободною струею была подробно исследована проф. Л. Прандтлем и дала хорошее совпадение формул с опытами. Закрытые трубы изучались в Англии (см. Report and Memoranda № 867) и в России в ЦАГИ. В Англии одни и те же крылья испытывались в двух трубах разного размера (квадратные трубы: $4' \times 4'$ и $7' \times 7'$); были взяты в качестве моноплана крыло RAF 6 и в качестве биплана комбинация двух крыльев RAF 15. В ЦАГИ в одной трубе велось исследование пяти крыльев разного размера. Понятно, что скорости потока при этих опытах подбирались так, чтобы число Рейнольдса во всех случаях оставалось постоянным. Опыт вполне подтвердил правильность поправочных формул. В настоящее время следует признать обязательным исправление по ним всех опытов, произведенных в аэродинамических трубах. Ранее всех стал вводить эти поправки проф. Л. Прандтль, потом англичане (1922 г.) и ЦАГИ (1923 г.). К сожалению, более ранние работы не исправлялись и при пользовании ими необходимо помнить об искажающем опыты влиянии аэродинамических труб. Особо нужно быть осторожным при сравнении опытов, произведенных в открытых и закрытых трубах, так как их влияния, направленные в разные стороны, могут совершенно исказить внешний вид опытных кривых и сделать их совершенно несравнимыми.

ЧАСТЬ II.

ГЛАВА VIII.

Общая теория монопланного крыла конечного размаха.

Излагавшаяся до сих пор теория опиралась на представленную на фиг. 5 картину вихрей. Другими словами, мы до сих пор принимали, что с крыла сбегает лишь два вихревых шнура.

Однако, в действительности такая картина не может получиться так как возле самых вихрей возникнут очень большие вертикальные скорости и углы атаки на концах крыльев столь сильно от этого уменьшаются, что крыло перестает там давать подъемную силу. При выводе основных формул, мы, для того, чтобы избежать бесконечных скоростей, сделали искусственное допущение, что вихри выходят не непосредственно из концов крыла, а идут на некотором от них расстоянии e (см. фиг. 11).

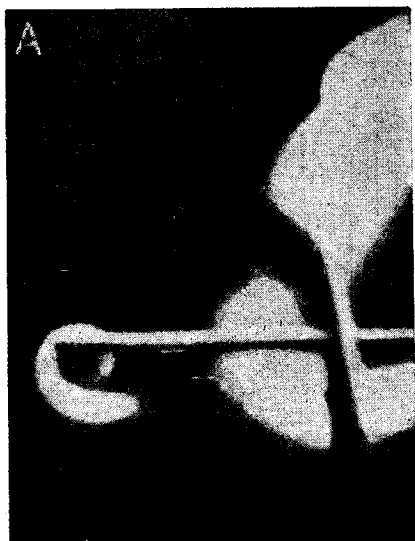
Весьма подробные английские опытные исследования показали что у прямоугольного крыла подъемная сила распределена по его размаху по закону, близкому к эллиптическому. Крыло слегка трапецевидное дает уже почти точно эллиптическое распределение нагрузки. Таким образом, в действительности всегда получается за крылом вихревой слой, вроде изображенного на фиг. 8.

Следовательно, все те задачи, какие мы решали с помощью прежней картины вихрей, мы решали лишь приближенно.

Теперь мы перейдем к изложению более строгой теории, основанной на предположении, что за крылом тянется бесчисленное множество параллельных, идущих по потоку вихревых нитей.

И это предположение лишь приблизительно верно, ибо, как показывает более подробное изучение этого вопроса, такая вихревая пелена неустойчива, и отдельные вихри, ее составляющие, действуют друг на друга. В конце концов оказывается, что эта пелена стремится свернуться опять-таки в два вихревых уса (см. фиг. 29). Вихревые нити при этом искривляются и, как показывает теория вихрей, они должны при этом двигаться по весьма сложному закону. Точное решение такой задачи в настоящее время невозможно. Американские опыты с продувкой крыльев на весьма больших скоростях потока показывают, что возникающие у концов крыльев вихри имеют весьма сложную и изменчивую форму (см. фиг. 30).

В этих опытах скорость потока доходила до 220 метров в секунду. Обстановка опытов была такова, что к бегущему по трубе воздуху можно было примешивать водяные пары; внутри вихрей происходило сильное адиабатическое расширение воздуха, и конденсировавшиеся водяные пары делались ясно видимыми и тем самым давали возможность фотографировать вихри. На этих фотографиях, снятых спереди вдоль по оси трубы, ясно видно само крыло, представляющееся горизонтальной линией.



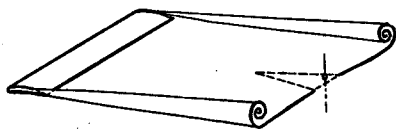
Фиг. 30.

ная в Германии и в Англии, действительно это подтвердила, и производимые при ее помощи расчеты дали весьма хорошее приближение к данным опытов.

После этих общих замечаний возвращаемся к нашей задаче. Мы сперва поставим ее так: по заданному закону распределения циркуляции по размаху крыла найти прежде всего вертикальную скорость потока непосредственно перед крылом, затем определить скос потока, подъемную силу и индуктивное сопротивление крыла.

Пусть у нас имеется монопланное крыло, обдуваемое потоком (см. фиг. 31). За ним получится вихревая пелена, состоящая из прямолинейных вихревых нитей. Если мы проведем два сечения I и II плоскостями, перпендикулярными к крылу, то в общем случае в этих сечениях будут существовать некоторые циркуляции скорости по всякому контуру, охватывающему крыло. Обозначим циркуляцию в сечении I через J_1 и в сечении II через J_2 .

Аналогично тому, как мы поступили при схеме двух вихрей, мы и здесь представляем циркуляцию вокруг крыла, как результат действия на жидкость воображаемого присоединенного вихря, идущего внутри крыла. Так как при переходе от сечения I ко II циркуляция изменяется, то, по теореме Гельмгольца о неучтожаемости вихрей, мы



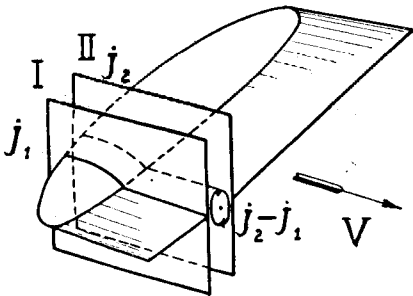
Фиг. 29.

Несмотря на неполную точность допущения, что вихри за крылом идут по прямым линиям, мы должны все же от этой схемы явления ожидать значительно большей точности, чем от прежней с двумя вихрями, так как даже прежняя схема уже давала во многих случаях вполне достаточную точность. Опытная проверка этой теории, произведенная

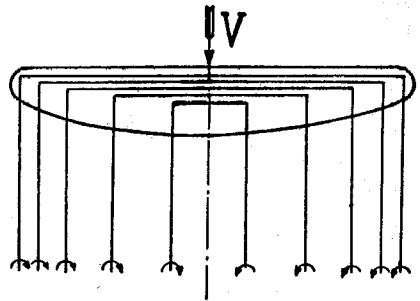
должны будем допустить, что разность циркуляций $J_2 - J_1$ сбежит с крыла между сечениями I и II в виде спутных вихрей с общей циркуляцией $(J_2 - J_1)$.

При бесконечно малом расстоянии между сечениями и разность $(J_2 - J_1)$ будет бесконечно малою, и можно принять, что на участке между этими сечениями сбежит лишь один вихрь с циркуляцией dJ .

Эту схему вихрей можно представить как бесконечную совокупность П-образных вихрей (см. фиг. 32), идущих частью внутри крыла и частью тянувшихся за ним в виде пелены.

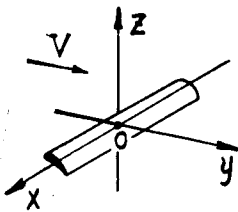


Фиг. 31.



Фиг. 32.

Для изучения скоростного поля, вызываемого такою системою вихрей, выбираем прямоугольную систему координат таким образом, чтобы ось x пошла по крылу, ось y направилась по невозмущенному еще крылом потоку; ось z будет тогда вертикальна (см. фиг. 33).



Фиг. 33.

На фиг. 34 представлено крыло так, как его видит наблюдатель, смотрящий спереди по направлению оси Oy .

Пусть кривая CDE представляет графически закон распределения циркуляции скорости по крылу, т.-е. ее ординаты равны J .

Будем обозначать координаты вихрей буквою x , а координаты точек крыла буквою ξ , считая и те и другие по оси x .

Проведем два сечения I и II с абсциссами x и $x + dx$. Изменение циркуляции между этими сечениями будет равно dJ , следовательно, циркуляция вихря, идущего между x и $x + dx$ будет также равна dJ .

Будем изучать действие таких элементарных вихрей на произвольно выбранную на крыле точку A с абсциссою ξ .

По формуле (3) получим для этого случая:

$$dw = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dJ}{x - \xi} = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dJ}{dx} \cdot \frac{dx}{x - \xi}. \quad (57)$$

Знаки в этой формуле выбраны так, чтобы при $dx > 0$, $dJ < 0$, и $x > \xi$, dw было бы > 0 , т.-е. мы считаем за положительное направление скорости w направление вниз.

В дальнейшем мы покажем, как можно обойти и эти затруднения и применить приближенный способ вычисления, — теперь же переходим к дальнейшему выводу основных формул этой теории.

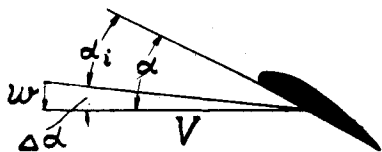
Подъемную силу элемента крыла длиной $d\xi$ легко выразить через циркуляцию при помощи теоремы Н. Е. Жуковского:

$$dP = \rho J V d\xi. \quad (59)$$

Полная подъемная сила найдется, как интеграл этого выражения

$$P = \rho V \int_{-l/2}^{+l/2} J d\xi = \rho V \Omega. \quad (60)$$

В этой формуле интеграл дает величину площади, лежащей между осью абсцисс и кривою циркуляции; ее мы обозначаем через Ω .



Фиг. 35.

Переходим теперь к определению индуктивного сопротивления крыла. Для этого отметим сперва, что зная в любой точке крыла скорость w , мы без труда определим скос потока перед этою точкою (см. фиг. 35) и найдем:

$$\Delta\alpha = \frac{w}{V}. \quad (61)$$

В общем случае величина скоса будет переменною вдоль по крылу, т.-е. $\Delta\alpha = f(\xi)$. Каждый элемент крыла, вырезанный сечениями I и II (см. фиг. 34), даст элементарное индуктивное сопротивление, которое обозначим dQ_i . Оно связано с подъемной силой dP этого же элемента знакомым нам соотношением (14), которое для данного случая напишем в виде

$$dQ_i = dP \Delta\alpha. \quad (62)$$

Полное индуктивное сопротивление для всего крыла выразится как сумма элементарных сопротивлений, т.-е.

$$Q_i = \int_{-l/2}^{+l/2} dP \cdot \Delta\alpha = \int_{-l/2}^{+l/2} \rho J V d\xi \cdot \frac{w}{V} = \rho \int_{-l/2}^{+l/2} J w d\xi. \quad (63)$$

Вводя сюда выражение для w по форм. (58) и делая отметки у величины J для различения, какая величина относится к интегрированию по x и какая по ξ , получим

$$Q = -\frac{\rho}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} J \xi \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{dx} \cdot \frac{dx}{x-\xi} d\xi = -\frac{\rho}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \int_{-l/2}^{+l/2} J \xi \frac{dJ_x}{dx} \cdot \frac{1}{x-\xi} \cdot dx d\xi \quad (64)$$

Как видим, выражение получается довольно сложное.

Для возможности находить в любой точке крыла поток, возбуждаемый вихрями, нам нужно еще найти особое уравнение, связующее циркуляцию с обычными аэродинамическими характеристиками крыла.

Для вывода этого уравнения связи воспользуемся двумя известными нам уравнениями. Первое дает величину подъемной силы элемента крыла, выраженную через циркуляцию:

$$dP = J \rho V d\xi.$$

Второе же дает ту же силу, выраженную через обычный коэффициент подъемной силы $C_y \infty$, соответствующий истинному углу атаки. При малых скосах, какие мы и рассматриваем, можно, как нам уже известно, считать $C_y \infty = C_y$.

Итак:

$$dP = \rho C_y V^2 b d\xi.$$

Из сравнения вторых частей этих равенств следует:

$$J = C_y V b. \quad (65)$$

Это и есть уравнение связи потока с крылом. Оно отличается от выведенного в первой части ур-ия (10) тем, что здесь величины J , C_y и b будут переменными по размаху крыла.

Зная истинные углы атаки на разных ξ , легко определить и величину профильного сопротивления крыла Q_p .

Действительно:

$$dQ_p = \rho C_p V^2 b d\xi, \quad (66)$$

и для всего крыла:

$$Q_p = \rho V^2 \int_{-l/2}^{+l/2} C_p b d\xi. \quad (67)$$

По изложенной теории можно спроектировать крыло на заданный закон распределения циркуляции.

Задавшись кривою циркуляции, мы можем по форм. (58) найти вертикальные скорости скоса w , затем по форм. (61) находим угловые скосы в градусах:

$$\Delta\alpha^\circ = 57,3 \frac{w}{V}. \quad (61')$$

Далее по данным испытания того профиля крыла, какой мы хотим употребить в дело, выбираем истинный угол атаки α° ист. и находим соответствующие C_p и C_y . Угол атаки можно выбирать, руководствуясь весьма различными соображениями, напр., можно брать такой угол, при каком C_p будет минимальным.

Задавшись расчетною скоростью полета, находим ширину b крыла на данном ξ по формуле (65)

$$b = \frac{J}{C_y V}.$$

Наклон этого элемента получится так:

$$\alpha^\circ = \alpha^\circ \text{ ист.} + \Delta\alpha^\circ.$$

По этим данным легко уже вычертить желательное крыло. Как видим, в общем случае, крыло будет перекрученное, т.-е. его хорды не будут лежать в одной плоскости.

Если отказаться от условия (C_p) min, то можно сделать крыло и с плоскою нижнею стороною. Точно также можно, задавшись шириною крыла в функции ξ , искать нужные наклоны α° элементов и т. п.

Вообще здесь можно поступать весьма различно в зависимости от поставленной задачи.

Вся трудность вопроса заключается в определении скорости w ; когда это сделано, остальное решается, как видим, сравнительно легко.

Аэродинамические характеристики спроектированного таким способом крыла можно без затруднений найти по формулам (60), (63) и (67).

Г Л А В А IX.

Монопланное крыло с эллиптическим законом распределения циркуляции по размаху.

До сих пор мы рассматривали монопланное крыло, исходя из предположения, что закон распределения циркуляции по его размаху нам задан.

Можно, однако, задачу изучения монопланного крыла поставить более обще, а именно попытаться найти закон циркуляции для заданных аэродинамических свойств крыла. Наиболее интересна задача о наивыгоднейшем крыле, т.-е. о крыле, дающем наименьшее лобовое сопротивление.

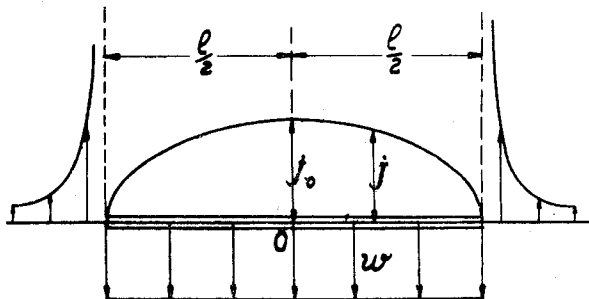
Постановка этой задачи такова: при заданной величине подъемной силы, т.-е.

$$P = \rho V \int_{-l/2}^{+l/2} J d\xi, \quad (60)$$

нужно получить минимум индуктивного сопротивления крыла, выражаемого формулою:

$$Q_i = -\frac{\rho}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \int_{-l/2}^{+l/2} J_{\xi} \frac{dJ_x}{dx} \cdot \frac{dx \cdot d\xi}{x - \xi} \quad (64)$$

Задачи такого типа решаются при помощи вариационного исчисления; здесь решение сильно затруднено как сложностью самих выражений, так и разрывностью подынтегральной функции второго уравнения. Однако все эти трудности были преодолены немецким ученым Мунком. Оказалось, что наивыгоднейшим законом циркуляции является ее распределение по размаху по закону полуэллипса ¹⁾ (см. фиг. 36).



Фиг. 36.

Назовем циркуляцию в центре крыла через J_0 . Тогда у эллипса, представленного на фиг. 36, полуоси будут: J_0 и $l/2$.

Уравнение эллипса примет теперь вид:

$$\frac{J^2}{J_0^2} + \frac{x^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = 1.$$

Отсюда находим закон изменения циркуляции по размаху:

$$J = J_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{l}\right)^2} \quad (64')$$

Так как важнейшею частью задачи являются вычисления скорости скоса w для разных ξ , то переходим к ее определению.

Пользуясь ур-нием (58), получаем для нашего случая:

$$w = -\frac{1}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{dx} \cdot \frac{dx}{x - \xi} = \frac{J_0}{4\pi l^2} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{4x}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{l}\right)^2}} \cdot \frac{dx}{x - \xi}.$$

¹⁾ Этого вывода мы здесь не приводим из-за его сложности.

Для интегрирования этого выражения вводим тригонометрическую подстановку:

$$x = \frac{l}{2} \sin \Theta.$$

и, следовательно,

$$dx = \frac{l}{2} \cos \Theta \cdot d\Theta.$$

Получаем:

$$w = \frac{J_0}{4\pi l^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{2l \sin \Theta}{\cos \Theta} \cdot \frac{\frac{l}{2} \cos \Theta \cdot d\Theta}{\frac{l}{2} \sin \Theta - \xi} = \frac{J_0}{2\pi l} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \Theta}{\sin \Theta - \frac{2\xi}{l}} \cdot d\Theta.$$

Далее

$$w = \frac{J_0}{2\pi l} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \Theta - \frac{2\xi}{l} + \frac{2\xi}{l}}{\sin \Theta - \frac{2\xi}{l}} \cdot d\Theta = \frac{J_0}{2\pi l} \left(\pi + \frac{2\xi}{l} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\Theta}{\sin \Theta - \frac{2\xi}{l}} \right) \quad (68)$$

Для вычисления интеграла, стоящего в скобках, вводим новую подстановку:

$$\operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} = u.$$

Тогда:

$$d\Theta = \frac{2du}{1+u^2}; \quad \sin \Theta = 2 \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\Theta}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\Theta}{2}} = \frac{2u}{1+u^2},$$

и интеграл примет вид:

$$\frac{2\xi}{l} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\Theta}{\sin \Theta - \frac{2\xi}{l}} = \frac{2\xi}{l} \int_{-1}^{+1} \frac{2du}{2u - \frac{2\xi}{l}(1+u^2)} = - \int_{-1}^{+1} \frac{2du}{u^2 - \frac{l}{\xi}u + 1}$$

Разлагаем подынтегральную функцию на две дроби, для чего ищем корни уравнения

$$u^2 - \frac{l}{\xi} u + 1 = 0,$$

и находим:

$$u_1 = \frac{l}{2\xi} + \sqrt{\frac{l^2}{4\xi^2} - 1} \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{1}{u_1} = \frac{l}{2\xi} - \sqrt{\frac{l^2}{4\xi^2} - 1}.$$

В пределах $-\frac{l}{2} < \xi < \frac{l}{2}$ корни эти действительны.

С помощью этих корней разлагаем интеграл на два и получаем,

$$\begin{aligned} & \frac{u_1}{u_1^2 - 1} \left(\int_{-1}^{+1} \frac{du}{u - u_1} - \int_{-1}^{+1} \frac{du}{u - \frac{1}{u_1}} \right) = \\ & = \frac{u_1}{u_1^2 - 1} \left(\ln \frac{1 - u_1}{1 + u_1} - \ln \frac{1 - u_1}{1 + u_1} \right) = 0, \end{aligned}$$

т.е. значение этого интеграла равно нулю¹⁾.

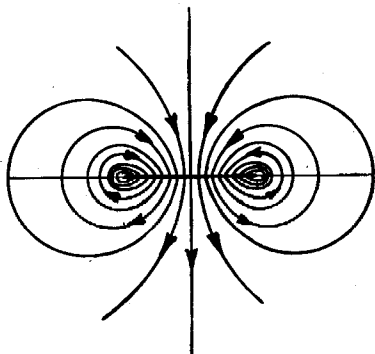
Возвращаясь к первоначальному выражению, служащему для вычисления w , форм. (68), получим окончательно:

$$w = \frac{J_0}{2l}. \quad (69)$$

Следовательно, при эллиптическом законе циркуляции скорость скоса постоянна по всему размаху крыла.

С аэродинамической точки зрения такую картину движения жидкости можно получить не только при помощи вихрей, но и при помощи ортогонального движения неограниченной материальной полосы в идеальной жидкости (см. фиг. 37).

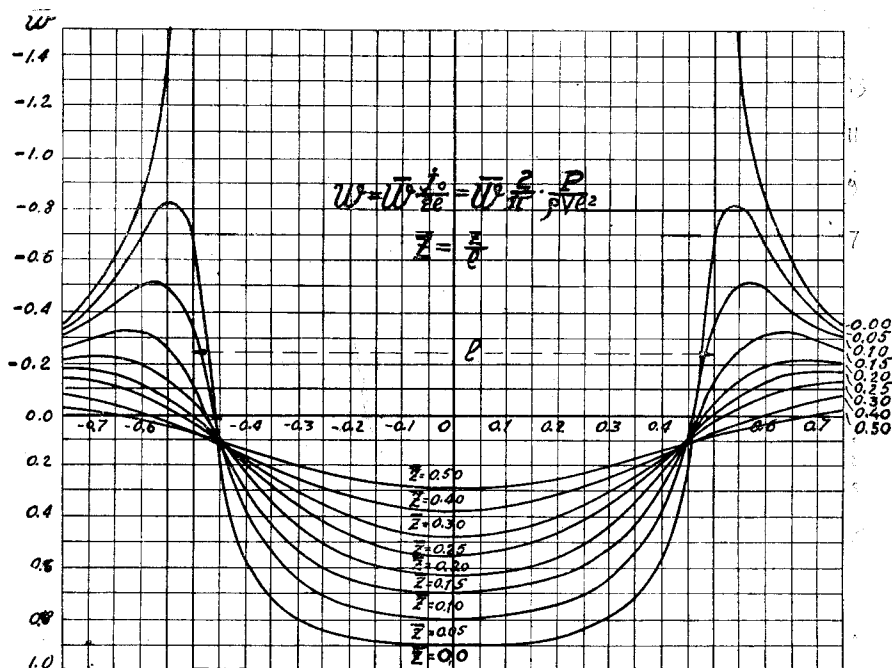
Если бесконечно длинная полоска, поперечное сечение которой представится на чертеже толстой линией, движется со скоростью w вниз, то частицы воздуха, лежащие на ее поверхности все будут иметь проекцию скорости на нормаль к ней, равную w ; иначе произойдет разрыв жидкости.



Фиг. 37.

¹⁾ И этот интеграл требует рассмотрения пределов, так как он имеет бесконечные значения для подынтегральной функции. Подробнее смотри N. Florine. Trainée induite des ailes d'avions. А. Саткевич. Аэродинамика. М. Мунк. Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie Fluges.

Это движение жидкости было изучено еще задолго до работ проф. Прандтля; в классическом руководстве Ламба указывается, что эта задача была решена им в 1877 году. Замена вихрей движением пластинок позволяет воспользоваться для определения потока теорией комплексного переменного и получить полное решение задачи не



Фиг. 38.

только для точек, лежащих на оси крыла, но и для любых точек, лежащих в плоскости XZ. Мы не будем останавливаться здесь на подробностях таких вычислений и приведем лишь готовый график (фиг. 38), представляющий изменение вертикальной скорости для разных точек плоскости XZ. Этот график был построен К. Польгаузенем по предложению проф. Л. Прандтля.

Он составлен таким образом, что для любых значений x и z можно при его помощи вычислить вертикальные скорости w по заданной величине J_0 .

Для удобства расчетов введены отвлеченные обозначения:

$$\bar{x} = \frac{x}{l};$$

$$\bar{z} = \frac{z}{l}$$

и

$$\bar{w} = \frac{w}{w_0},$$

т.-е. в них приняты за единицу длины — размах крыла, а за единицу скоростей — величина постоянной скорости w_0 на самом крыле.

Очевидно, что при таких обозначениях

$$\bar{w} = f(\bar{x}, \bar{z}).$$

График Польгаузена и дает эту зависимость. Кривые \bar{w} построены на нем в координатах \bar{w} и \bar{x} при постоянном значении величины \bar{z} для каждой кривой.

Таким образом, зная координаты какой-либо точки x и z и зная размах крыла l и циркуляцию в его середине J_0 , мы получим по графику по \bar{x} и \bar{z} величину \bar{w} и затем найдем

$$w = \bar{w} \cdot \frac{J_0}{2l}. \quad (70)$$

Возвращаясь к нашей задаче изучения монопланного крыла, займемся определением сил, действующих на крыло.

Подъемная сила найдется по общей формуле

$$P = \rho V \Omega.$$

В случае закона полуэллипса площадь Ω будет такова:

$$\Omega = \frac{\pi}{2} J_0 \frac{l}{2} = \frac{\pi}{4} J_0 l.$$

Следовательно, подъемная сила примет вид:

$$P = \frac{\pi}{4} \rho J_0 V l. \quad (71)$$

Индуктивное сопротивление найдем по скосу потока, который будет здесь величиною постоянною и равною

$$\Delta \alpha = \frac{w}{V} = \frac{J_0}{2lV}. \quad (72)$$

Вводя эту величину в выражение (63), получим

$$Q_i = \rho \int_{-l/2}^{+l/2} J w d\xi = \rho w \int_{-l/2}^{+l/2} J d\xi = \rho \frac{J_0}{2l} \Omega = \frac{\pi}{8} \rho J_0^3. \quad (73)$$

Для практических расчетов удобнее представить индуктивное сопротивление Q_i через подъемную силу P . Для этого определяем из уравнения (71) величину циркуляции J_0 и подставляем ее в форм. (73) и (70). Получаем:

$$Q = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{4^2}{\pi^2} \cdot \frac{P^2}{\rho^2 V^2 l^2} \cdot \rho = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{P^2}{\rho V^2 l^2}, \quad (74)$$

$$w = \frac{2}{\pi} \frac{P}{\rho V l^2} \bar{w}. \quad (75)$$

Эту же величину часто выражают через коэффициент подъемной силы C_y . Тогда

$$P = \rho C_y S V^2.$$

и

$$Q = \frac{2}{\pi} C_y^2 \frac{S^2}{l^2} \rho V^2.$$

Деля обе части полученного уравнения на $\rho S V^2$, получим весьма употребительную формулу

$$C_i = \frac{2}{\pi} \frac{S}{l^2} C_y^2. \quad (76)$$

Если разделить обе части этого уравнения на C_y , то найдем

$$\Delta\alpha = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{S}{l^2} \cdot C_y. \quad (77)$$

Последние две формулы совпадают с теми, какие мы уже получили с помощью теории двух вихрей для прямоугольного крыла. Действительно, там мы имели

$$C_i = \frac{2}{\pi\lambda} C_y^2 \quad (18)$$

и

$$\Delta\alpha = \frac{2}{\pi\lambda} C_y. \quad (13)$$

Вводя сюда величину $\lambda = \frac{l^2}{S}$, получим

$$C_i = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{S}{l^2} \cdot C_y^2.$$

$$\Delta\alpha = \frac{2}{\pi} \frac{S}{l^2} C_y.$$

Однако, индуктивное сопротивление получится для прямоугольного и эллиптического крыла совершенно различное, так как в первом случае придется подставить $S = bl$, а во втором

$$S = \frac{\pi}{4} b_0 l.$$

Получится это вследствие того обстоятельства, что форма крыла с эллиптическим законом циркуляции, будет в плане эллиптической, если только установить все его профили под одним углом атаки, напр., дающим минимум профильного сопротивления. Действительно, по уравнению связи (65) имеем

$$J = C_y V b.$$

При заданной скорости полета V и заданном для всего крыла угле атаки получим:

$$b = J \cdot \text{const},$$

т.-е. ширина крыла пропорциональна циркуляции. Если циркуляция изменялась по закону эллипса, то по такому же закону будет изменяться и ширина крыла. Наибольшую ширину крыла будем обозначать через b_0 . Площадь такого крыла будет

$$S = \frac{\pi}{4} b_0 l.$$

Легко убедиться, что у такого крыла хорды профилей будут лежать в одной плоскости.

Действительно, скос потока $\Delta\alpha$ у такого крыла будет постоянным по размаху. Прибавив к нему постоянный, напр., наивыгоднейший истинный угол атаки α_i мы получим постоянный же угол атаки

$$\alpha = \alpha_i + \Delta\alpha = \text{const.}$$

ГЛАВА X.

Расчет крыльев произвольной формы.

Для практических целей было бы очень важным научиться решать следующую задачу: по заданной геометрической форме крыла суметь найти его аэродинамические свойства. При этом предполагается, что нам известны по продувкам аэродинамические свойства его профилей (для бесконечного размаха).

Однако, задача эта оказывается чрезвычайно сложною и сводится к решению интегрально-дифференциального уравнения, что может быть сделано лишь приближенными методами, путем затраты большой вычислительной работы ¹⁾.

Мы уже вывели в главе VIII величину скорости скоса w для крыла произвольной формы:

$$w = -\frac{1}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{dx} \cdot \frac{dx}{x - \xi} \quad (58)$$

Отсюда находим угол скоса

$$\Delta\alpha = \frac{w}{V} = -\frac{1}{4\pi V} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{dx} \cdot \frac{dx}{x - \xi}$$

Величина циркуляции на данном ξ связана с коэффициентом подъемной силы уравнением связи

$$J = C_y b V.$$

¹⁾ A. Betz. Beiträge zur Tragflügeltheorie mit Besonderer Berücksichtigung des einfachen rechteckigen Flügels. Doktordissertation, 1919, и Glauert. Calculation of the characteristics of tapered wings. British Advisory Committee. R. a. M., № 767—1921.

Коэффициент C_y может считаться линейной функцией истинного угла атаки для любого элемента крыла. Обозначив абсолютную величину угла атаки при нулевой подъемной силе через α_0 , мы сможем написать:

$$C_y = \frac{d C_y}{d \alpha_i} (\alpha_0 + \alpha - \Delta \alpha).$$

Для крыльев бесконечного размаха, согласно теории таких крыльев,

$$\frac{d C_y}{d \alpha_i} = \pi,$$

и, следовательно:

$$C_y = \pi (\alpha_0 + \alpha - \Delta \alpha).$$

Подставляя это выражение в уравнение связи и заменяя $\Delta \alpha$ только что выведенным значением, получаем:

$$J = \pi b V \left[\alpha_0 + \alpha + \frac{1}{4\pi V} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{dx} \cdot \frac{dx}{x - \xi} \right]. \quad (A)$$

Это и есть основное уравнение для решения задачи о крыле произвольного очертания. Легко видеть, что, задавшись законом изменения величин $b = f(\xi)$ и $\alpha = \varphi(\xi)$, мы получим по этому уравнению связь между всеми интересующими нас величинами. Основная для этой теории величина—циркуляция скорости J —входит в формулу один раз прямо, как член левой части уравнения, а во второй части она фигурирует под знаком интеграла в виде дифференциального отношения.

Решение этой задачи сводится к разложению функции в ряды. Мы здесь не будем останавливаться на подробностях, а дадим лишь готовые результаты, полученные Бетцем для ряда частных случаев.

Для важнейшего для практики случая—для прямоугольного крыла, по вычислениям Бетца, оказалось, что индуктивное сопротивление может быть выражено формулой

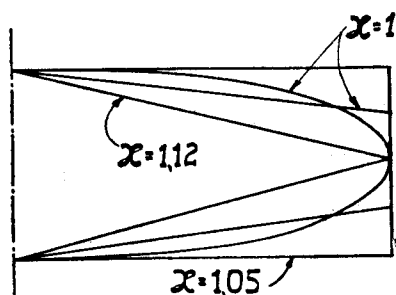
$$C_i = \kappa \frac{2}{\pi} \frac{S}{l^2} C_y^2. \quad (78)$$

Величина κ для прямоугольного крыла получилась у него переменной и зависящей от относительного размаха крыла λ (см. таблицу III). В среднем для ходовых λ ее можно считать равной 1,05. В случае крыла с треугольным очертанием в плане величина κ оказывается равной уже 1,12. Если крыло имеет трапецевидную форму с хордой на конце, равной $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}$ наибольшей хорды крыла, то можно считать $\kappa \cong 1,00$, т.-е. у такого крыла циркуляция будет весьма близкою к эллиптической.

При выводе этих коэффициентов было принято, что все профили крыла подобны и что все хорды профилей лежат в одной плоскости.

Фигуру (39) можно пользоваться для грубой оценки коэффиц. влияния λ . Нанеся на эту фигуру план какого-либо крыла, легко прикинуть „на глаз“ величину λ ; для облегчения таких соображений мы написали ее значения на крыльях соответствующей формы.

Наиболее интересен для практики случай прямоугольного крыла. Оказывается, что скорость скоса и индуктивное сопротивление у него сильно возрастает к концам крыла (см. фиг. 40).



Фиг. 39.

Это обстоятельство делает мало надежным обычный переход от характеристик прямоугольного крыла к характеристикам крыла бесконечного размаха. Если бесконечные характеристики нужны лишь как вспомогательные величины для перехода от одного размаха к другому для прямоугольных крыльев, то ошибка получается малою и расчеты остаются достаточно точными. В случае же, когда нужны действительно характеристики бесконечного крыла, как это имеет место при расчете крыльев произвольной формы и пропеллеров, то здесь необходимо пользоваться более надежным переходом к бесконечному размаху.

Наиболее надежным способом является пересчет на бесконечный размах крыльев эллиптической формы, ибо у них угол скоса постоянен по всему размаху. Однако, модели таких крыльев значительно дороже, чем прямоугольных, и во всех лабораториях испытываются, главным образом, прямоугольные крылья.

Вследствие этого представляет большой интерес решение задачи о более надежном методе пересчета прямоугольного крыла на бесконечный размах.

Сперва посмотрим как будет изменяться при заданном угле атаки подъемная сила (коэффициент C_y) при разных λ .

Обратимся к фиг. 16. Мы увидим на ней, что $DD_1 = \Delta\alpha$;

$$C_{y\infty} = D_{11}E \text{ и } C_y = DE = D_{11}E - DD_{11} = C_{y\infty} - DD_{11}.$$

В прямоугольном треугольнике DD_1D_{11} угол $D_{11}D_1D$ нам известен, ибо

$$\operatorname{tg} D_{11}D_1D = \frac{dC_{y\infty}}{d\alpha_i} = \pi.$$

Отсюда находим:

$$DD_{11} = \Delta\alpha \cdot \pi$$

и

$$C_y = C_{y\infty} - \pi \Delta\alpha.$$

Так как

$$\Delta\alpha = \frac{2}{\pi\lambda} C_y,$$

то

$$C_y = C_{y\infty} - \frac{2}{\lambda} C_y.$$

Из этого уравнения находим отношение подъемной силы бесконечного крыла к силе крыла с относительным размахом λ при одинаковых углах атаки для обоих крыльев:

$$\frac{C_{y\infty}}{C_y} = 1 + \frac{2}{\lambda}. \quad (B)$$

Эта величина дана для разных λ в таблице III. Как видим, при уменьшении относительного размаха, подъемная сила значительно уменьшается.

Этот пересчет будет правильным лишь для крыльев с эллиптическим законом распределения нагрузки по размаху.

Для крыла прямоугольного получается еще большее падение подъемной силы из-за сильного уменьшения углов атаки на концах крыльев. Пользуясь уравнением (A), Бетц нашел более точную величину этого отношения для прямоугольного крыла,—эта величина также приведена в таблице III и обозначена там через

$$\left(\frac{C_{y\infty}}{C_y}\right)_{\text{Бетца}}.$$

Т а б л и ц а III.

λ	$\left(\frac{C_{y\infty}}{C_y}\right)_{\text{Бетца}}$	$\frac{C_{y\infty}}{C_y}$	$\frac{C_{y\infty} \text{ Бетца} - C_{y\infty}}{C_y}$	z
1.57	2.344	2.273	0.071	1.007
3.14	1.699	1.640	0.059	1.020
6.28	1.371	1.318	0.053	1.051
14.12	1.181	1.142	0.040	1.124

Из этой таблицы видно, что по формуле (B) получается при пересчете на бесконечный размах прямоугольных крыльев несколько меньшие, чем надо, величины для подъемной силы. Это можно исправить вводя поправочный коэффициент $\frac{C_{y\infty} \text{ Бетца} - C_{y\infty}}{C_y}$, который для

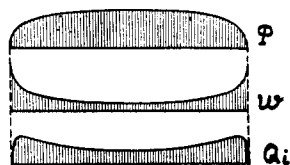
ходовых удлинений крыльев может быть принят постоянным и равным 1,05. Формулу (B) в этом случае можно написать в виде

$$\frac{C_{y\infty}}{C_y} \approx 1.05 + \frac{2,1}{\lambda}. \quad (B_1)$$

Пользуясь этою формулою и формулою (78) со значением $\lambda = 1,05$, можно получить достаточно надежные характеристики для крыльев бесконечного размаха по продувкам крыльев прямоугольных.

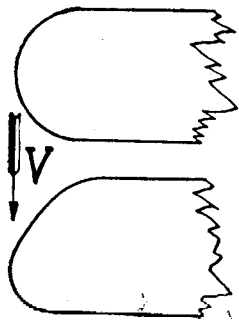
Кроме размаха, оказывают некоторое влияние на свойства крыльев и другие факторы. В частности довольно сильно влияет форма концевого образа крыла.

Так, опыты, произведенные в Англии и Америке, показывают, что округление концов прямоугольного крыла может несколько уменьшить его индуктивное сопротивление. В общем округление концов улучшает качество прямоугольного крыла от 1%—4%. При этом оказывается, что выгоднее скашивать крыло несколько назад (см. фиг. 41).



Фиг. 40.

Очень часто приходится на практике решать задачу о распределении подъемной силы и сопротивления по размаху крыла произвольной формы. При этом иногда считают, что соседние элементы крыла друг на друга не действуют, и, разрезав крыло при помощи поперечных сечений на узкие полоски, определяют действующие на крыло полные силы простым суммированием элементарных сил, исходя из углов атаки.



Фиг. 41.

Этот способ может вести к большим неточностям, ибо аэродинамические силы элемента крыла определяются его истинным углом атаки, зависящим от скоса потока.

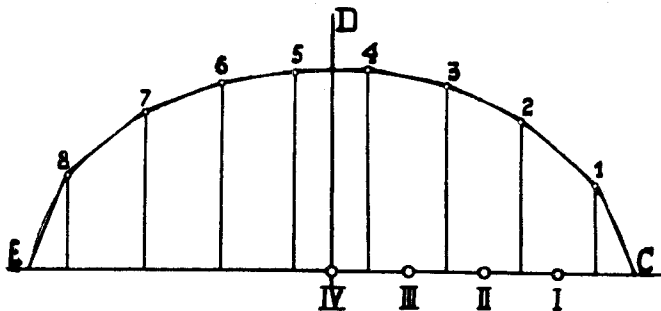
Вследствие этого, для получения большей точности вычисления, приходится прибегать к различным, хотя приближенным приемам, но учитывающим действие вихрей. Мы рекомендуем следующий простой способ ¹⁾. Задаемся сперва подходящим законом распределения циркуляции по

размаху крыла $J = f(\xi)$, — этот закон на фиг. 42 представится кривою CDE.

Заменяем эту кривую ломаною линиею, состоящею из прямолинейных участков C1, 12, 23, 33 и т. д. Для получения достаточной точности следует брать число участков не слишком малое, — примерно надо брать их 16—20.

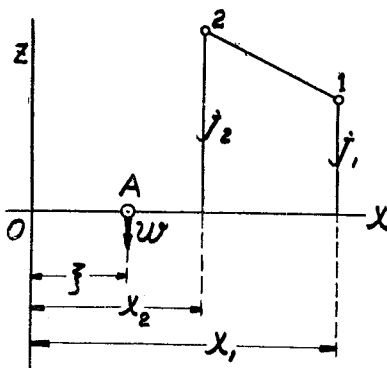
¹⁾ См. Б. Н. Юрьев. — Определение аэродинамических свойств крыльев произвольного очертания в плане. Вестник Воздушного Флота, № 2, 1923 г.

Самую линию C12345...8E следует делать невписанной или описанной по отношению к кривой CDE, а следует проводить ее так, чтобы она возможно близко изображала заменяемую ее кривую CDE, для чего ее придется провести так, как это изображено на чертеже, т.е. она будет пересекаться с нею в целом ряде точек и займет некоторое среднее положение между вписанным и описанным многоугольниками.



Фиг. 42.

Наша задача будет заключаться в вычислении скоростей скоса вызываемых отдельными прямолинейными участками 12, 23, 34... и т. д. в различных точках крыла. Зная действие отдельных элементов на какую-нибудь точку I, мы получим полную скорость скоса, как сумму всех скоростей, вызванных отдельными прямолинейными элементами.



Фиг. 43.

Точки I, II, III, IV и т. д., в которых мы определяем скорость скоса, берем в достаточном количестве для получения полной картины распределения скоса по размаху. Достаточно брать от 8 до 10 таких точек, при чем их следует брать, как увидим из дальнейшего, под серединами приходящихся над ними прямолинейных элементов.

Крайнее сечение I не должно быть слишком близким к краю крыла,—желательно, чтобы между ним и краем нахо-

дилось не менее трех элементов ломаной линии.

Площадь, ограниченная этой ломаной линией и ось абсцисс позволит сразу найти подъемную силу крыла, так как

$$P = \rho V \Omega. \quad (60)$$

Ищем теперь скорость, вызванную в точке A (см. фиг. 43) прямолинейным элементом 1—2.

Предположим сперва, что точка A не лежит под элементом 1—2. Пусть абсцисса точки A есть ξ , а абсциссы начала и конца прямолинейного элемента будут x_1 и x_2 . Величина $\frac{dJ}{dx}$ будут для прямолинейного отрезка постоянною по всему элементу и, очевидно, равную

$$\frac{dJ}{dx} = \frac{J_1 - J_2}{x_1 - x_2} = a.$$

Скорость w_{12} , вызванная элементом, может быть теперь найдена из общей формулы (58). Для данного случая получаем:

$$w_{12} = -\frac{1}{4\pi} \int_{x_2}^{x_1} \frac{dJ}{dx} \cdot \frac{dx}{x - \xi} = -\frac{a}{4\pi} \ln \frac{x_1 - \xi}{x_2 - \xi}. \quad (79)$$

По этой формуле находим действие отдельных элементов и затем находим полную скорость, как сумму влияний отдельных элементов, т.е.

$$w_A = w_{01} + w_{12} + w_{23} + \dots + w_{(n-1)n} = \sum_1^n w_{(m-1)m}.$$

Следует отметить, что средний элемент на фиг. (42) имеет

$$\frac{dJ}{dx} = a = 0,$$

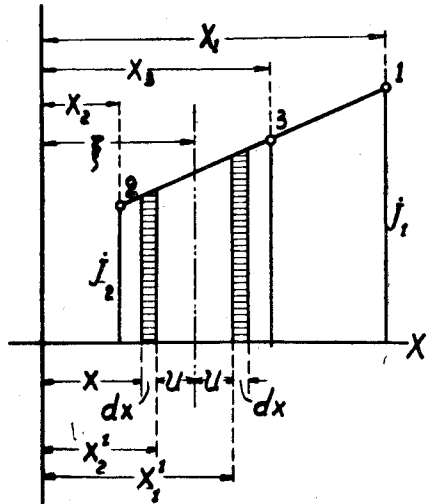
следовательно его влияние на крыло равно нулю.

Определим теперь действие элемента на точку $A(\xi)$, находящуюся непосредственно под ним (см. фиг. 44).

Если мы от абсциссы ξ отложим вправо и влево равные отрезки u и возьмем у их концов полоски шириною dx , то, как легко усмотреть из чертежа, что элементарные вихри, им соответствующие, будут иметь одно и то же направление вращения.

Легко далее убедиться, что действие этих вихрей на точку $A(\xi)$ будет равно-противоположным, и в результате от их действия никакой добавочной скорости в точке A не получится.

Действительно, величина a будет для обоих элементов одна и та же. Следовательно, скорости dw_1 и dw_2 , ими вызванные, будут таковы:



Фиг. 44.

$$dw_1 = -\frac{1}{4\pi} a \frac{dx}{x_1' - \xi}$$

$$dw_2 = -\frac{1}{4\pi} a \frac{dx}{x_2' - \xi}.$$

Из чертежа видно, что

$$x_1' - \xi = u \text{ и } x_2' - \xi = -u,$$

следовательно,

$$dw_1 = -\frac{a}{4\pi} \cdot \frac{dx}{u}$$

и

$$dw_2 = +\frac{a}{4\pi} \cdot \frac{dx}{u};$$

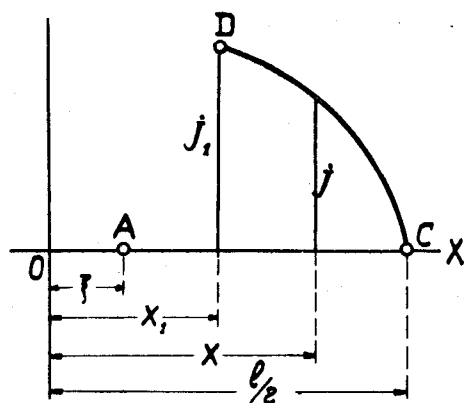
Сумма этих скоростей равна нулю. Такое рассуждение мы можем применить для любых пар элементов участка 2.3; отсюда делаем вывод, что влияние участка 1.2 сводится лишь к влиянию его части 1.3. Действие же внешнего по отношению к точке А (ξ) участка мы уже изучили и можем для определения вызванной им скорости w воспользоваться формулой (79). Заметим только, что для данного случая нам придется ввести в нее абсциссу точки 3, которая равна:

$$x_3 = \xi + (\xi - x_2) = 2\xi - x_2.$$

Подставляя эту величину в форм. (79), получим окончательно:

$$w_{12} = w_{13} = -\frac{a}{4\pi} \ln \frac{x_1 - \xi}{\xi - x_2}. \quad (80)$$

Для упрощения расчетов выгоднее брать точки I, II, III и т. д., так, как мы уже на это указывали, т.е. на серединах соответствующих участков, так как тогда действие на них участков, лежащих непосредственно над ними, будет равно нулю.



Фиг. 45.

Для увеличения точности расчета у концов крыла, где циркуляция весьма сильно изменяется, можно вместо прямолинейных элементов брать отрезки параболы. Так как обычно у конца крыла циркуляция имеет производную, равную бесконечности, то вершину параболы следует помещать на самых концах крыла. На фиг. 45 и представлено такое расположение. Пусть в точке D с абсциссой x_1 циркуляция имеет величину J_1 . Проводим через точки C и D параболу, заменяющую действительную кривую. Ее уравнение будет таково:

$$\frac{\frac{l}{2} - x}{\frac{l}{2} - x_1} = \frac{J^2}{J_1^2}.$$

Отсюда

$$J = J_1 \sqrt{\frac{\frac{l}{2} - x}{\frac{l}{2} - x_1}} \quad (81)$$

Действие участка CD на точку A с абсциссой ξ выразится по уже известной нам формуле:

$$w = -\frac{1}{4\pi} \int_{x_1}^{\frac{1}{2}} \frac{dJ}{dx} \cdot \frac{dx}{x - \xi}.$$

Вычислив по форм. (81) производную $\frac{dJ}{dx}$, мы сможем произвести интегрирование и получить выражение для скорости w . Мы здесь не приводим самого вычисления, так как оно по существу хотя и просто, но требует довольно длинных выкладок, а даем прямо окончательный результат:

$$w = \frac{J_1}{8\pi \sqrt{\frac{l}{2} - \xi} \cdot \sqrt{\frac{l}{2} - x_1}} \cdot \ln \frac{\sqrt{\frac{l}{2} - \xi} + \sqrt{\frac{l}{2} - x_1}}{\sqrt{\frac{l}{2} - \xi} - \sqrt{\frac{l}{2} - x_1}} \quad (82)$$

На практике можно выражения, входящие в форм. (79, 80 и 82) под знаком корня или логарифма, не вычислять, а брать прямо по чертежу. Для получения влияния левого параболического участка следует в найденную формулу подставить вместо ξ величину $(-\xi)$.

Однако, в большинстве случаев оказывается, что точность, получаемая при разбивке кривой циркуляции на прямолинейные участки, вполне достаточна для целей практики. Вследствие этого к формуле 82) следует прибегать лишь в исключительных случаях, при весьма резком изменении циркуляции; нормально же следует пользоваться форм. (79).

На практике ход расчета какого-либо крыла будет таков: задаемся сперва некоторым углом атаки и подходящим законом циркуляции $J = f(\xi)$ и ищем скорости w в разных точках крыла, т.е. находим $w = f_1(\xi)$. Определив скос потока $\Delta\alpha$, находим истинные углы атаки α_i для разных ξ . Пользуясь пересчитанными на бесконечный размах продувками профилей, находим C_y и C_p .

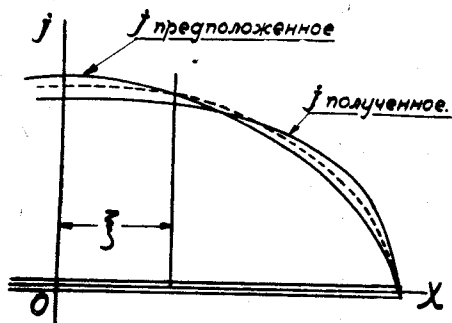
Зная ширину крыла $b = f_2(\xi)$, вычисляем для разных ξ циркуляцию, исходя из уравнения связи:

$$J = C_y V b.$$

Так как величины C_y и b будут функциями ξ , то и величина J получится как некоторая ее функция, т.-е.

$$J = f_g(\xi).$$

На фиг. (46) нанесены две кривых циркуляции, — предположенная $f(\xi)$ и полученная по уравнению связи $f_g(\xi)$. Обычно на практике расхождение таких кривых невелико. Из рассмотрения этих кривых видим, что в этом частном случае необходимо уменьшить истинные углы атаки у концов крыла и увеличить их на его середине. Для этого надо увеличить интенсивность сходящихся с концов вихрей и ослабить центральные вихри. Другими словами, нужно будет взять некоторый промежуточный закон циркуляции



Фиг. 46.

$f_{11}(\xi)$, — он изображен на фиг. (46)

пунктирной линией — и снова повторить с ним определение w , α_i , C_i и снова найти циркуляцию по формуле $J = C_y V b$.

Обычно после второго пересчета предположенная и полученные кривые практически совпадают и можно принять полученный таким приемом закон циркуляции за истинный¹⁾.

Так, как обычно закон циркуляции не слишком сильно отличается от эллиптического, то лучше всего первоначально задаваться именно таким законом и затем изучать лишь действие добавочной циркуляции, создающей прибавки к основной скорости скоса.

Когда будет найден закон распределения циркуляции по размаху крыла и скорости скоса, то дальнейший расчет не будет представлять никаких затруднений.

Так, индуктивное сопротивление найдется по формуле (63):

$$Q_i = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dP \cdot \Delta\alpha = \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} J w d\xi = \rho Q_1 \quad (83)$$

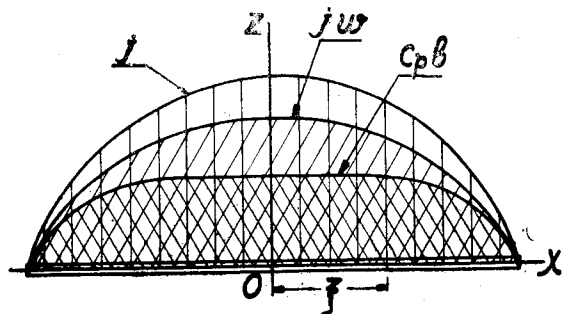
Для определения этой величины достаточно построить на размахе крыла кривую Jw и определить интеграл, как площадь Q_1 , ограниченную этою кривою и осью абсцисс (см. фиг. 47).

¹⁾ Несмотря на математическую „неуклюжесть“ такого приема, он на практике оказался довольно удобным и быстро ведет к правильному ответу. Более точные методы изложены в английских работах — см. Technical Reports of the Aeronautical Research Committee. R a M, № 806, 824, 833.

Совершенно аналогично найдем и профильное сопротивление крыла, ибо, зная b и C_p , как функции ξ , и пользуясь формулой (67), получим:

$$Q_p = \rho V^2 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} C_p b d\xi = \rho V^2 \Omega_2. \quad (84)$$

Здесь Ω_2 есть площадь, ограниченная кривою $C_p b$ и осью абсцисс (фиг. 47).



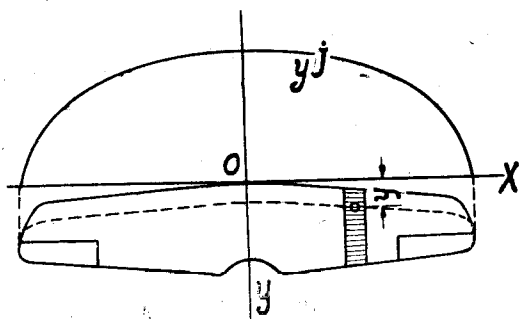
Фиг. 47.

Таким образом, пользуясь форм. (60, 83 и 84) и определив три площади Ω , Ω_1 и Ω_2 , мы получим подъемную силу крыла P , индуктивное сопротивление Q_i и профильное сопротивление Q_p .

По этим данным можно вычислить C_y , C_i и C_p .

Если такой расчет произвести для нескольких углов атаки, то по этим данным можно будет построить кривую Лилиенталя.

Вопросы устойчивости точно также решаются очень легко, так как положение центра давления для каждого элемента крыла определяется лишь истинным углом атаки α_i . Определив истинный угол атаки для разных ξ , мы можем, разбив все крыло на узкие полоски, определить положение и величину элементарной силы, действующей на каждую полоску (см. фиг. 48). Если пренебречь лобовыми сопротивлениями, то по правилам статики мы можем, проведя какую-нибудь ось OX , написать уравнение, определяющее положение координаты центра параллельных сил dP , дающих равнодействующую P :



Фиг. 48.

$$\bar{y} = \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} y dP}{P}$$

Замечая, что

$$dP = \rho V d\xi,$$

получим окончательно

$$\bar{y} = \frac{\rho V}{P} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} y J d\xi = \frac{\rho V}{P} \Omega_3. \quad (85)$$

В этой формуле Ω_3 есть площадь, ограниченная на фиг. 48 кривою yJ и осью абсцисс.

Не представляет никаких трудностей определение центра давления и с учетом лобовых сопротивлений, — на этом мы здесь останавливаться не будем.

Изложенным приемом можно рассчитывать крылья самой произвольной формы, например, с профилями и хордою, изменяющимися по размаху; крылья перекрученные, т.-е. с разными углами атаки в конце и начале и т. п.

Для возможности этого расчета необходимо иметь опытные данные, пересчитанные на бесконечный размах. Такие данные точнее всего получаются при помощи продувок эллиптических крыльев, ибо лишь у эллиптического крыла углы атаки для всех его сечений оказываются равными. Однако, как мы уже указывали, модели таких крыльев значительно дороже, чем прямоугольных, и во всех лабораториях испытываются главным образом прямоугольные крылья. Пересчет же кривых Лилиентала на бесконечный размах, исходя из прямоугольного крыла, менее надежен, так как истинные углы атаки у него не одинаковы для разных ξ .

Однако, даже и в последнем случае все же получается точность, вполне достаточная для решения многих вопросов практики.

ГЛАВА XI.

Индуктивное сопротивление полипланов при эллиптическом законе распределения циркуляции скорости по размаху всех крыльев.

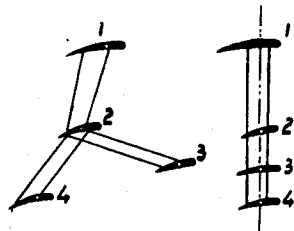
Подобно тому, как у моноплана, так и у крыльев полиплана в действительности получится не по два вихря, а по целой вихревой полосе. Точное решение задачи о скоростях, возникающих в потоке, набегающем на крылья, крайне трудно. Даже в случае моноплана приходится делать, как мы уже видели, довольно сложные расчеты. Это происходит вследствие того, что скорости потока определяются законом распределения циркуляции по размаху крыльев, а сам этот закон в свою очередь зависит от тех же скоростей.

Для упрощения расчетов проф. Л. Прандтль предложил считать циркуляцию у всех крыльев полипланной коробки всегда распре-

деленною по их размаху по закону полуэллипса. Как показали опыты, такое предположение дает значительно большую точность, чем гипотеза двух вихрей.

Подробное исследование такой коробки крыльев показывает, что и для нее соблюдаются обе нами уже выведенные с помощью гипотезы П-образных вихрей теоремы Мунка (см. гл. V).

Первая теорема Мунка. Любую полипланную коробку крыльев можно заменить такою эквивалентною, у которой все центральные вихри, заменяющие крылья, будут лежать друг над другом в одной плоскости, перпендикулярной к линии полета (см. фиг. 49). Индуктивное сопротивление у такой коробки будет равно индуктивному сопротивлению первоначальной, если только подъемные силы крыльев не изменятся, для чего при такой замене крыльев придется немного изменить углы атаки вследствие несколько изменившегося скоса потока перед каждым крылом.



Фиг. 49.

Вертикальные расстояния между крыльями при этом не изменяются и вид спереди на такую коробку без выноса ничем не будет отличаться от вида на первоначальную, если только отвлечься от небольшого изменения углов атаки необходимого для сохранения величины подъемных сил.

Вторая теорема Мунка. В коробке без выноса индуктивные сопротивления пары крыльев, обусловленные лишь их взаимным влиянием, равны друг другу, т.-е.

$$Q_{i12} = Q_{i21}.$$

Эти теоремы во многих случаях практики весьма облегчают расчеты полипланов.

Переходим теперь к определению скоса потока, получающегося у каждого крыла полиплана от влияния остальных крыльев. При этом считаем, что исследуемая коробка крыльев не имеет выноса. В этой теории учитываем и то обстоятельство, что скос будет у каждого крыла переменным по его размаху. Определение полной скорости скоса производим, применяя принцип наложения, т.-е. считаем, что скорости скоса от отдельных крыльев суммируются. Применяя индексы, мы можем написать, например, что для среднего крыла триплана полный скос выразится формулою:

$$W_{2(1+2+3)} = W_{21} + W_{22} + W_{23}. \quad (86)$$

Для вычисления скоростей скоса удобнее всего пользоваться уже описанным в гл. IX графиком Польгаузена (см. фиг. 38). Пусть мы изучаем действие крыла 1 на крыло 2. Взяв какую-нибудь точку крыла 2, определяем ее отвлеченные координаты по отношению к крылу 1, т.-е.

$$\bar{x} = \frac{x}{l_1}$$

и

$$\bar{z} = \frac{h}{l_1};$$

здесь $h = z$ — вертикальное расстояние между крыльями.

Найдя по графику Польгаузена по этим данным величину

$$\bar{w}_{21} = f(\bar{x}, \bar{z}),$$

получим из форм (75) скорость скоса

$$w_{21} = \frac{J_{01}}{2 l_1} \cdot \bar{w}_{21} = \frac{2}{\pi} \frac{P_1}{\rho V l_1^2} \bar{w}_{21}. \quad (87)$$

Для вычисления этой скорости необходимо знать циркуляцию или подъемную силу у крыла 1, — следовательно, расчет сложной коробки приходится вести, задавшись предварительно распределением подъемной силы между крыльями.

Беря попарно все крылья, мы найдем для каждой точки каждого крыла полный скос потока по формуле (86).

Ищем теперь индуктивное сопротивление каждого крыла. Для случая триплана, изображенного на фиг. 50, получим для первого крыла по форм. (62) выражение:

$$Q_{i1 \cdot (1+2+3)} = \int_{-\frac{l_1}{2}}^{+\frac{l_1}{2}} \frac{w_{1(1+2+3)}}{V} dP_1.$$

Заменяя здесь силу через циркуляцию по формуле

$$dP = \rho J_1 V d\xi_1,$$

получим:

$$Q_{i1(1+2+3)} = \rho \int_{-\frac{l_1}{2}}^{+\frac{l_1}{2}} J_1 w_{1(1+2+3)} d\xi_1.$$

Величину этого интеграла проще всего можно получить графическим путем, отложив величину $J_1 w_{1(1+2+3)}$ как ординату на соответственных точках крыла 1; тогда площадь, ограниченная полученною так кривою и осью абсцисс, даст величину интеграла.

Такое же построение следует применить и к остальным крыльям. На фиг. 50 для каждого крыла триплана построены кривые циркуляции J_1, J_2 и J_3 , затем кривые скорости скоса потока w , возникающие

от каждого из остальных крыльев и от самоиндукции и, наконец, кривые Jw , площади которых Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 служат для вычисления индуктивного сопротивления крыльев.

Для получения эллиптической нагрузки необходимо соблюсти для каждого элемента крыла условие, налагаемое уравнением связи.

Для m -го крыла и для его абсциссы ξ получим, ставя соответственные индексы:

$$J_{m\xi} = C_{ym\xi} \cdot b_{m\xi} V.$$

Отсюда видим, что, задаваясь циркуляцией, мы получим для каждого значения ξ вполне определенную величину произведения:

$$C_{ym\xi} \cdot b_{m\xi} = \frac{J_{m\xi}}{V}.$$

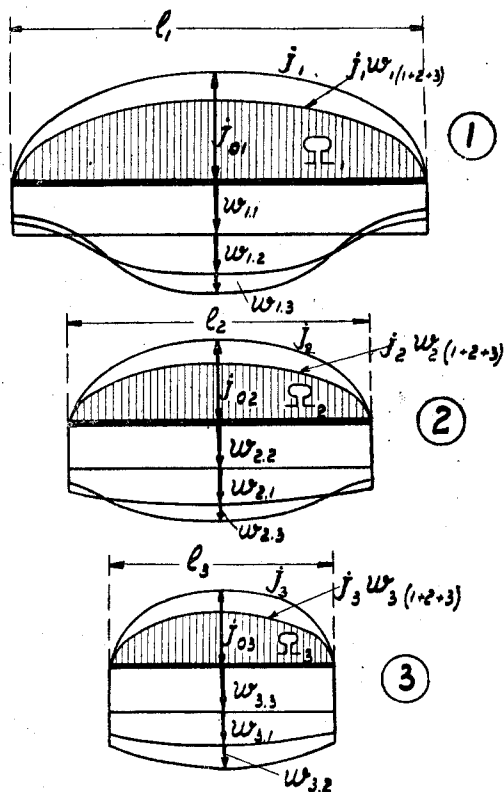
Следовательно, при проектировании такого крыла мы можем комбинировать при заданном профиле лишь два фактора — ширину и истинный угол

атаки у всякого элемента крыла. Выбрав так или иначе угол атаки α_{im} элемента (напр., из условия $C_p =$ минимуму или $b_m =$ заданной величине), получим наклон элемента (угол атаки) на абсциссе ξ по формуле:

$$\alpha_{m\xi} = \alpha_{im\xi} + \Sigma \Delta \alpha_{m\xi} = \alpha_{im\xi} + \frac{W_m (1+2+3+\dots+m) \xi}{V}.$$

Пользуясь этими соотношениями, можно найти крыло с заданными эллиптическим законом циркуляции и имеющим ту или иную форму. Например, можно сделать крыло с постоянной шириною, т.е. $b = \text{const}$; тогда $\alpha_{m\xi}$ будет величиною переменною и крыло будет перекрученным (его хорды не будут лежать в одной плоскости). Можно, наоборот, сделать $\alpha_{m\xi} = \text{const}$, тогда ширина крыла станет величиною переменною.

Когда выбраны истинные углы атаки, то легко подсчитать и профильное сопротивление, для чего достаточно воспользоваться выражением (84). Получаем, например, для 1-го крыла:



Фиг. 50.

$$Q_{p1} = \rho V \int_{-\frac{l_1}{2}}^{+\frac{l_1}{2}} C_{p1\xi} b_{1\xi} d\xi_1. \quad (84)$$

Его величину находим графически как площадь между кривой $C_{p1\xi} b_{1\xi}$, построенной на размахе крыла 1 и его осью абсцисс.

Центр давления или момент аэродинамических сил, действующих на каждое крыло, может быть найден тем же приемом, как у моноплана, только здесь нельзя пренебрегать лобовыми сопротивлениями.

Когда будут определены аэродинамические свойства всех крыльев порознь, то нахождение их суммарного эффекта не представит никаких затруднений, и может быть сделано по общим правилам статики.

В тех случаях, когда распределение подъемной силы между крыльями неизвестно, приходится вести расчет по способу последовательных приближений, т.е., задаваясь предварительно вероятным распределением сил, исправлять их затем по результатам проверочного расчета.

Как мы уже упомянули, этот расчет связан с графиком Польгаузена (фиг. 38) и так как этот график дает скорости \bar{w} лишь для точек, лежащих в плоскости, перпендикулярной потоку и проходящей через ось крыла, то он может быть применен лишь для коробок без выноса. В случае же коробки с выносом приходится приводить произвольную коробку планов к коробке без выноса и лишь тогда делать расчет описанным приемом. После же производства такого расчета необходимо вернуться к коробке с выносом. Для этого приходится в настоящее время пользоваться формулами Бетца (30), (32) и (35), выведенными для П-образных вихрей. Расчет тогда сводится к некоторой небольшой поправке скоса потока и соответственному изменению углов атаки у отдельных крыльев.

Для того, чтобы не делать каждый раз определение площадей Q_1 , Q_2 и т. д., можно сразу заготовить их величины для характерных расположений крыльев. Вместо самих площадей удобно ввести особые, предложенные проф. Л. Прандтлем, отвлеченные коэффициенты сопротивления σ .

Мы знаем, что

$$Q_{i21} = \int_{-\frac{l_2}{2}}^{+\frac{l_2}{2}} \Delta\alpha_{21} dP_2 = \int_{-\frac{l_2}{2}}^{+\frac{l_2}{2}} \frac{w_{21}}{V} dP_2. \quad (62)$$

Величина w_{21} по предыдущему такова:

$$w_{21} = \bar{w}_{21} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{P_1}{\rho l_1^2 V},$$

где

$$\bar{w}_{21} = f(\bar{x}, \bar{z}).$$

Ищем теперь величину dP_2 , входящую в выражение Q_{i21} . По теореме Н. Е. Жуковского мы имеем:

$$dP_2 = \rho J_2 V d\xi_2. \quad (59)$$

При эллиптическом законе распределения циркуляции

$$J_2 = J_{02} \sqrt{1 - \left(\frac{2\xi_2}{l_2}\right)^2}, \quad (64)$$

и, следовательно:

$$dP_2 = \rho V J_{02} \sqrt{1 - \left(\frac{2\xi_2}{l_2}\right)^2} \cdot d\xi_2 \quad (88)$$

Для крыла с эллиптическим законом мы вывели уже соотношение

$$P_2 = \frac{\pi}{4} \rho J_{02} V l_2. \quad (71)$$

Определив отсюда J_{02} и подставив в ур-ние (88), найдем:

$$dP_2 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{P_2}{l_2} \sqrt{1 - \left(\frac{2\xi_2}{l_2}\right)^2} \cdot d\xi_2.$$

Подставляя эту величину dP_2 в выражение Q_{i21} (см. форм. 62), получим:

$$Q_{i21} = \frac{2}{\pi \rho} \frac{P_1 P_2}{l_1 l_2} \cdot \frac{1}{V} \left[\frac{4}{\pi} \int_{-\frac{l_2}{2}}^{+\frac{l_2}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{2\xi_2}{l_2}\right)^2} \frac{d\xi_2}{l_2} \cdot \bar{w}_{21} \right].$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, очевидно представляет собою число отвлеченное, зависящее лишь от отвлеченных характеристик формы коробки планов. Обозначим это число буквою σ . Тогда мы можем написать:

$$Q_{i12} = Q_{i21} = \frac{2}{\pi \rho V^2} \frac{P_1 P_2}{l_1 l_2} \sigma. \quad (89)$$

Величина σ есть функция формы коробки планов. Удобнее всего за такие характеристики формы принять, согласно Польгаузена, величины:

$$\mu = \frac{l_2}{l_1}, \quad (90)$$

т.е. отношение размахов крыльев и

$$\eta = \frac{h}{\frac{l_1 + l_2}{2}}, \quad (91)$$

т.е. отношение высоты коробки к ее среднему размаху. Тогда σ будет функцией лишь этих двух величин:

$$\sigma = \varphi(\mu, \eta).$$

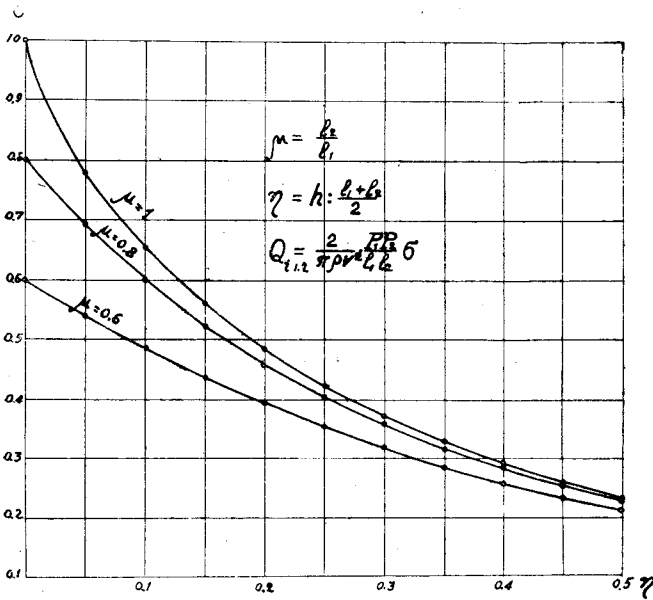
В таблице IV даны результаты вычисления величины σ для разных значений μ и η . На фиг. 51 изображена эта зависимость графически.

В таблице величины $\mu < 1$. В тех случаях, когда $\mu > 1$, следует просто брать

$$\mu' = \frac{1}{\mu}.$$

Это следует из теоремы Мунка, гласящей, что $Q_{12} = Q_{21}$ и, следовательно, и для верхнего и нижнего крыльев мы можем брать

$$\mu = \frac{l_2}{l_1}$$



Фиг. 51.

Таблица IV.
Величина $\sigma = \varphi(\mu, \eta)$.

$\mu \backslash \eta$	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.50
1.0	1.000	0.780	0.655	0.561	0.685	0.420	0.370	0.327	0.290	0.258	0.230
0.8	0.800	0.690	0.600	0.523	0.459	0.401	0.355	0.315	0.282	0.252	0.225
0.6	0.600	0.540	0.485	0.437	0.394	0.351	0.315	0.285	0.255	0.231	0.210

или

$$\mu' = \frac{l_1}{l_2},$$

и пользоваться тем, которое меньше единицы.

В частном случае, когда $\mu = 1$, т.е. $l_1 = l_2 = l$, можно пользоваться также приближенными формулами проф. Прандтля.

Так, если

$$\eta = \frac{h}{l}$$

лежит в пределах

$$1/15 < \eta < 1/4,$$

то можно брать

$$\sigma \approx \frac{1}{1 + 5,3 \eta}. \quad (92)$$

Более точно можно брать

$$\sigma \approx \frac{1 - 0,66 \eta}{1,055 + 3,7 \eta}. \quad (93)$$

Эта формула применима для η в пределах от $1/15$ до $1/2$. В случае, когда $\mu \neq 1$, лучше всего пользоваться графиком фиг. 51.

При такой манере расчета приходится брать сперва коробку без выноса и переходить затем уже к коробке с выносом по формулам Бетца (30), (32) и (35).

Г Л А В А XII.

Наивыгоднейшие полипланы.

Б и п л а н.

Индуктивное сопротивление бипланной коробки без выноса может быть написано в виде:

$$Q_i = Q_{i11} + Q_{i12} + Q_{i21} + Q_{i22}.$$

Так как $Q_{i12} = Q_{i21}$, то

$$Q_i = Q_{i11} + 2 Q_{i21} + Q_{i22}.$$

Мы уже имеем выражения

$$Q_{i11} = \frac{2}{\pi \rho V^2} \cdot \frac{P_1^2}{l_1^2} \quad (74)$$

$$Q_{i22} = \frac{2}{\pi \rho V^2} \cdot \frac{P_2^2}{l_2^2} \quad (74)$$

$$Q_{i21} = \frac{2}{\pi \rho V^2} \cdot \frac{P_1 P_2}{l_1 l_2} \sigma. \quad (89)$$

Следовательно:

$$Q_i = \frac{2}{\pi \rho V^2} \left(\frac{P_1^2}{l_1^2} + 2\sigma \frac{P_1 P_2}{l_1 l_2} + \frac{P_2^2}{l_2^2} \right). \quad (94)$$

Легко видеть, что величина выражения в скобках зависит от того, как будут распределены подъемные силы между крыльями. Обозначим полную подъемную силу бипланной коробки через P . Тогда

$$P = P_1 + P_2.$$

Пусть на нижнее крыло придется x -овая часть всей подъемной силы, т.е.

$$P_2 = x P, \quad (95)$$

тогда

$$P_1 = (1 - x) P. \quad (96)$$

Подставляя эти выражения в формулу (94), дающую величину индуктивного сопротивления для всей коробки, получим:

$$Q_i = \frac{2 P^2}{\pi \rho V^2 l_1^2} \left[\frac{x^2}{\mu^2} + 2 \frac{\sigma}{\mu} x (1 - x) + (1 - x^2) \right].$$

Для определения минимума величины Q_i дифференцируем выражение, стоящее в скобках по x и приравняем результат нулю. Решение такого уравнения даст наивыгоднейшую величину x .

Она оказывается в данном случае равною

$$x = \frac{\mu - \sigma}{\mu + \frac{1}{\mu} - 2\sigma}. \quad (97)$$

Подставляя найденное значение x в формулу (94), найдем

$$Q_{i \min} = \frac{2 P^2}{\pi \rho V^2 l_1^2} \cdot \frac{1 - \sigma^2}{\mu \left(\mu + \frac{1}{\mu} - 2\sigma \right)} = \frac{2 P^2}{\pi \rho V^2 l_1^2} x, \quad (98)$$

где x , как легко видеть, есть коэффициент уменьшения индуктивного сопротивления биплана по сравнению с монопланом, так как, полагая $x = 1$ и беря у моноплана размах $l = l_1$, мы приведем формулу (98) к формуле (74), дающей индуктивное сопротивление моноплана при заданной подъемной силе P и размахе l_1 .

Следовательно:

$$x = \frac{Q_{i \text{ биплана}}}{Q_{i \text{ моноплана}}}.$$

Заменяя в формуле (98) Q_i через $C_i \rho S V^2$ и P через $C_y \rho S V^2$, где C_i , C_y и S относятся ко всей коробке крыльев, получим:

$$C_{i \min} = x \frac{2}{\pi} \cdot \frac{S}{l_1^2} C_y^2. \quad (99)$$

Величина x зависит от формы коробки. Так, если $l_1 = l_2 = l$ или $\mu = 1$, то легко найти, что $x = 0,5$ и

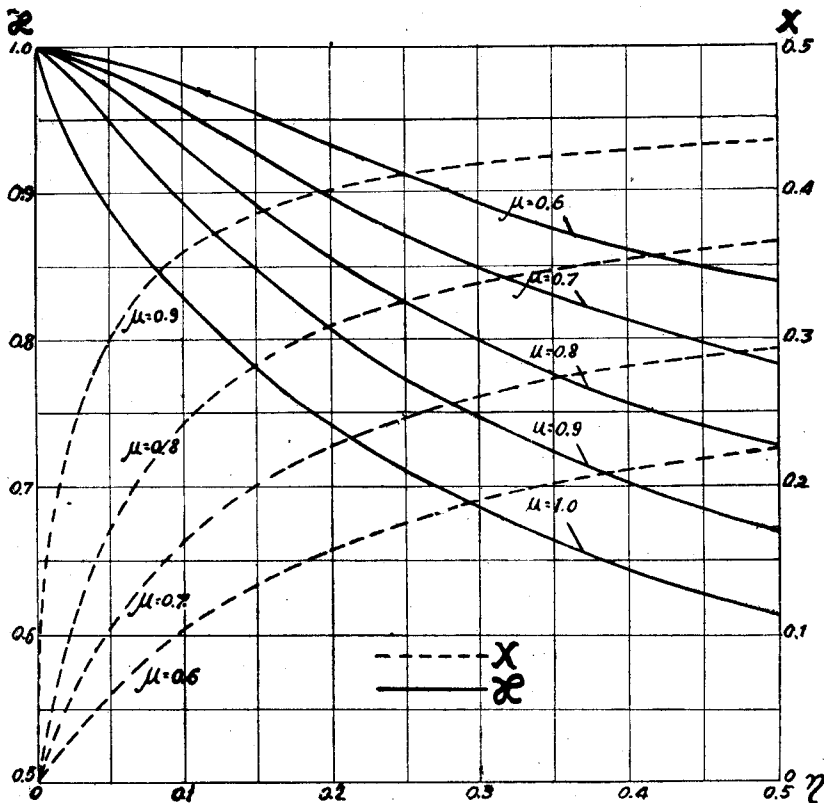
$$x = \frac{1 + \sigma}{2},$$

т.е. в этом случае подъемная сила при минимуме индуктивного сопротивления должна быть распределена поровну между планами.

Для различных величин η и μ имеются готовые таблицы V и VI, дающие сразу x и χ .

Из того обстоятельства, что $x < 1$, отнюдь не следует, что биплан лучше моноплана; — все улучшение у биплана происходит здесь лишь из-за увеличения относительного размаха его крыльев (см. гл. VI).

Зависимость величин x и χ от μ и η представлена графически на фиг. 52.



Фиг. 52. График Л. Прандтля для индуктивного сопротивления наивыгоднейших бипланов.

Этими графиками очень удобно пользоваться при решении различных частных вопросов. Например, задавшись размахами верхнего и нижнего крыльев и расстоянием между ними, легко найти x и χ . Если при этом сделать у обоих крыльев равную нагрузку на единицу поверхности, то, как легко убедиться на частных примерах, у нижнего крыла с меньшим размахом придется сделать и меньшую ширину.

Таблица V.

$$\text{Величина } x = \frac{P_2}{P} = f(\mu, \eta).$$

$\mu \backslash \eta$	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
0.6	0	0.060	0.104	0.134	0.157	0.176	0.191	0.202	0.211	0.218	0.224
0.7	0	0.105	0.164	0.202	0.228	0.248	0.262	0.272	0.281	0.288	0.294
0.8	0	0.172	0.246	0.285	0.310	0.327	0.338	0.347	0.355	0.361	0.364
0.9	0	0.303	0.359	0.387	0.402	0.412	0.419	0.425	0.429	0.431	0.433
1.0	—	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500

Таблица VI.

$$\text{Величина } x = \frac{Q_i \text{ биплана}}{Q_i \text{ моноплана}} = f_1(\mu, \eta).$$

$\mu \backslash \eta$	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
0.6	1.000	0.990	0.974	0.954	0.932	0.911	0.892	0.875	0.861	0.848	0.839
0.7	1.000	0.982	0.956	0.926	0.897	0.871	0.849	0.830	0.812	0.797	0.783
0.8	1.000	0.974	0.932	0.892	0.855	0.825	0.800	0.778	0.758	0.740	0.728
0.9	1.000	0.950	0.893	0.947	0.807	0.773	0.744	0.719	0.699	0.683	0.671
1.0	1.000	0.890	0.827	0.779	0.742	0.710	0.684	0.662	0.645	0.629	0.615

Проверкою этих формул занималась в Германии лаборатория Прандтля в Гёттингене и в Англии — Национальная Физическая Лаборатория (N. P. L.).

Совпадения опытов с теориею оказалось в случае биплана весьма удовлетворительным, и в настоящее время этою теориею пользуются все конструкторы самолетов. При этом оказывается, что как старая теория биплана, разработанная Бетцем, так и новая дают для прямоугольного крыла довольно хорошие результаты.

Если вычислить как по старой, так и по новой теории величину отношения Q_{12} к Q_{11} , т.-е. отношение индуктивного сопротивления у крыла 1 от крыла 2 к индуктивному сопротивлению крыла 1 от самоиндукции для коробки биплана без выноса с равными размахами и силами у обоих крыльев, то получим результат, зависящий от

$$\eta = \frac{h}{l};$$

он представлен графически на фиг. 53.

Для наиболее часто встречающихся высот биплана, т.-е. $\eta = 0,06 - 0,15$, расхождение в величинах

$$\frac{Q_{i12}}{Q_{i11}}$$

вычисленных по новой и старой теориям, будет равно $7\% - 16\%$.

Однако, индуктивное сопротивление Q_{i12} составляет лишь некоторую часть полного сопротивления крыла, — приблизительно оно составляет около половины сопротивления от самоиндукции и почти равно профильному сопротивлению. Следовательно, окончательное расхождение обеих теорий не превзойдет $2\% - 5\%$ от полного сопротивления крыла. Эта величина, однако, уже близка к пределу точности измерений при опытном определении сопротивления моделей крыльев в аэродинамических трубах.

Кроме того, эллиптическая теория хорошо оправдывается лишь у крыльев с циркуляцией, действительно распределенною по закону эллипса. Для этой цели проф. Прандтль делал в нескольких опытах прямоугольное крыло несколько перебитым. Если же употребляется крыло с постоянным углом атаки и постоянною шириною, как это чаще всего и бывает на практике, то получаются обычно результаты, лежащие между данными обеих теорий.

Таким образом, на практике можно без особо большой ошибки пользоваться и более старою теориею Бетца. Она имеет еще некоторое преимущество перед новою, так как в ней легко оценивать влияние выноса крыла, что по новой теории сделать пока не удастся.

Трипланы и полипланы.

Совершенно аналогичным приемом может быть исследовано индуктивное сопротивление трипланов. Беря все крылья с равными размахами и комбинируя крылья попарно, получим

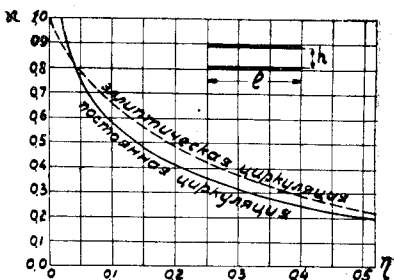
$$Q_{i1} = \frac{2}{\pi \rho V^2 l^2} (P_1^2 + \sigma_1 P_1 P_2 + \sigma_2 P_1 P_3)$$

$$Q_{i2} = \frac{2}{\pi \rho V^2 l^2} [P_2^2 + \sigma_1 (P_1 P_2 + P_2 P_3)]$$

$$Q_{i3} = \frac{2}{\pi \rho V^2 l^2} (P_3^2 + \sigma_1 P_2 P_3 + \sigma_2 P_1 P_3).$$

В этих формулах σ_1 соответствует расстоянию между крыльями, равному $h/2$ и σ_2 — расстоянию h ; здесь h — полная высота коробки.

Если задаться вопросом о наивыгоднейшем распределении подъемных сил у триплана, то сразу же, по принципу независимости дей-



Фиг. 53.

ствия, можно сказать, что при равных размахах силы верхнего крыла P_1 и нижнего P_3 должны быть равными друг другу, так как они представляют собою бипланную коробку, обладающую, как мы уже видели, этим свойством. Влияние среднего крыла при этом не отразится на наивыгоднейшем распределении подъемных сил у крайних крыльев, так как это влияние будет одинаковым как для верхнего, так и для нижнего крыльев. Нагрузка же среднего крыла должна находиться вычислением. Считая $P_1 = P_3$ и обозначив $P_2 = Px$, где $P = P_1 + P_3 + P_2$, мы сможем написать:

$$Q_i = Q_{i1} + Q_{i2} + Q_{i3} = \frac{P^2}{\pi \rho V^2 l^2} [1 + \sigma_2 - 2x(1 - \sigma_2 - 2\sigma_1) + x^2(3 + \sigma_2 - 4\sigma_1)] \quad (100)$$

Это выражение имеет минимум при

$$x = \frac{1 - \sigma_2 - 2\sigma_1}{3 - \sigma_2 - 4\sigma_1} \quad (101)$$

Для облегчения вычислений в таблице VII даны значения x для разных величин

$$\eta = \frac{h}{l}$$

Оказывается, что для наивыгоднейшего триплана величина x всегда меньше $1/3$. Другими словами, среднее крыло в комбинации триплана должно быть нагружено меньше, чем крайние крылья.

Для определения индуктивного сопротивления пользуемся такою же, как для биплана, формулою

$$Q_i = x \frac{2P^2}{\pi \rho V^2 l^2} \quad (102)$$

или

$$C_i = x \frac{2}{\pi} \frac{S}{l} C_y^2 \quad (103)$$

Здесь S — полная площадь всех крыльев и C_y — суммарный коэффициент подъемной силы.

Коэффициент x показывает уменьшение индуктивного сопротивления данной комбинации крыльев по сравнению с монопланом с теми же величинами S , l и C_y (или P , V и l).

Таблица VII.

Величина $x = \frac{P_2}{P}$ для наивыгоднейшего триплана.

$\eta = \frac{h}{l}$	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
x	0	0.161	0.177	0.190	0.202	0.212	0.222	0.231	0.238	0.244	0.251

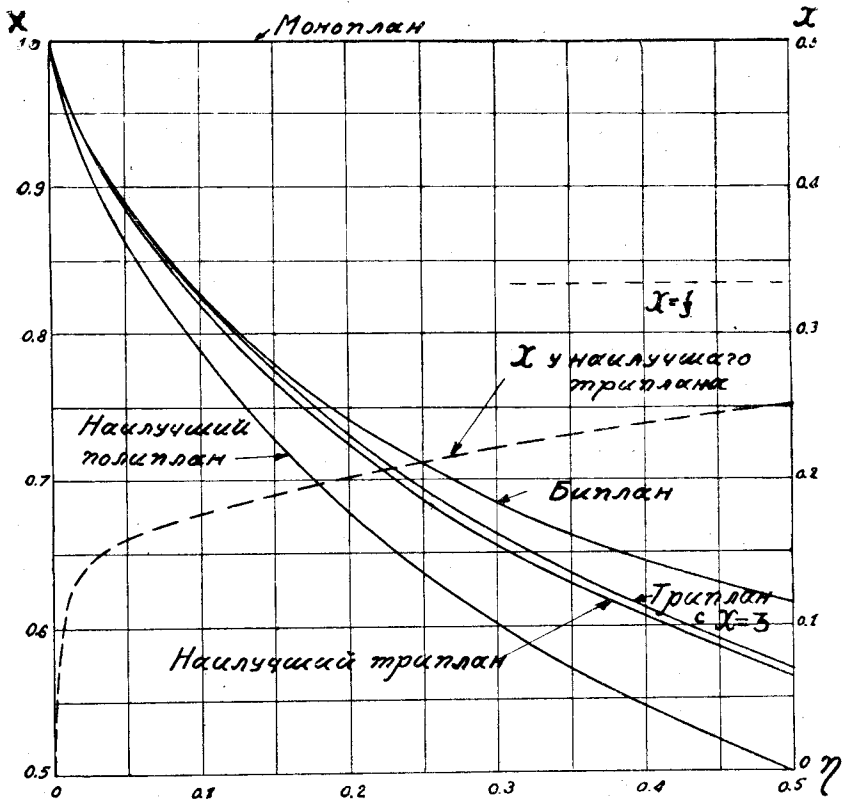
Величина χ для $l_1 = l_2 = l_3 = l$ дана в таблице VIII.

Таблица VIII.

Коэффициент уменьшения индуктивного сопротивления χ .

$\eta = \frac{h}{l}$	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
Биплан . .	1	0.890	0.827	0.779	0.742	0.710	0.684	0.662	0.645	0.629	0.615
Триплан. .	1	0.889	0.824	0.774	0.732	0.695	0.663	0.637	0.612	0.591	0.571
Наивыг. триплан . .	1	0.885	0.819	0.767	0.724	0.687	0.656	0.630	0.507	0.585	0.565
Наивыг. полиплан . .	1	0.865	0.787	0.728	0.678	0.637	0.601	0.572	0.545	0.521	0.500

На этой таблице для сравнения приведены также данные для биплана и триплана с равным распределением сил по всем крыльям, т.-е. у биплана взят $\chi = 1/2$, а у триплана $\chi = 1/3$.



Фиг. 51. Сравнение индуктивного сопротивления моноплана, биплана, триплана и полиплана по теории Л. Прандтля.

Кроме того, на той же таблице даны значения χ для наивыгоднейшего полиплана, состоящего из очень большого числа крыльев, равного размаха и имеющего высоту коробки, равную h . По подробным исследованиям Л. Прандтля у такого полиплана закон циркуляции близок к эллиптическому лишь у внешних крыльев, — у крыльев же средних он близок к закону постоянной циркуляции. Крайние крылья у него оказываются сильнее нагруженными, чем средние.

Результаты всех этих исследований представлены графически на фиг. 54. Как легко усмотреть, разница между трипланом с наивыгоднейшим распределением подъемной силы по крыльям с трипланом с равномерно распределенною подъемною силою очень невелика.

Наивыгоднейший полиплан дает меру совершенства той или иной коробки крыльев, позволяя сравнивать ее индуктивное сопротивление с наименьшим возможным сопротивлением для данных l и h .

Для наивыгоднейшего полиплана можно пользоваться также приближенной формулой:

$$\kappa = \frac{1 + 0,45 \eta}{1,04 + 2,81 \eta}. \quad (104)$$

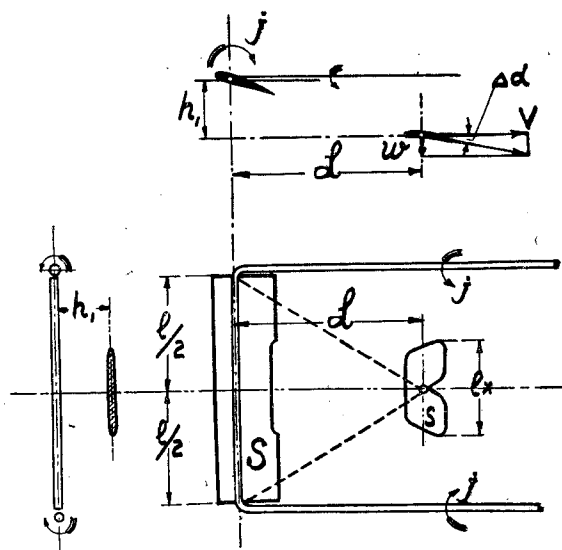
Ко всем изложенным выводам следует прибавить еще следующие замечания. Эллиптический закон циркуляции, вообще говоря, может быть соблюден у крыла лишь для определенного угла атаки, — при других углах он может заметно нарушиться. Точно также и наивыгоднейшее распределение подъемной силы по крыльям может быть осуществлено лишь для одного заданного угла атаки. Вследствие этого на все теории индуктивного сопротивления следует смотреть лишь как на приближенные; поэтому очень часто при пользовании ими вводят некоторые упрощения в вычисления, например, пренебрегают изменением скоростей набегающего воздуха на отдельные крылья, т.-е. фактором

$$\frac{\Delta V}{V}$$

(см. гл. V), что вносит в окончательный результат ничтожную погрешность.

Г Л А В А XIII.

Влияние коробки крыльев на оперение самолета.



Фиг. 55.

При решении вопросов об устойчивости самолетов крайне важным фактором является необходимость точного определения углов атаки стабилизатора.

Многочисленные опыты по исследованию потока за крылом показывают, что у хвоста самолета получается сильный скос, направленный вниз. Вследствие этого действительный угол атаки хвостового оперения весьма сильно отличается от кажущегося.

На фиг. 55 представлен самолет со сбегающими

концом его крыльев вихрями. Подходя к этой задаче сточки зрения теории П-образных вихрей, мы без труда найдем вертикальную скорость в центре давления стабилизатора.

Легко видеть, что эта скорость будет вызвана двумя вихревыми усами и центральным вихрем, идущим внутри крыла. Мы можем написать по принципу независимости:

$$w = w_1 + 2w_2.$$

По формуле (4') (гл. I) получим для усов:

$$2w_2 = 2 \frac{J}{4\pi \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h_1^2}} \left\{ 1 + \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h_1^2 + L^2}} \right\},$$

и для центрального вихря:

$$w_1 = \frac{J}{2\pi} \cdot \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{h_1^2 + L^2} \sqrt{h_1^2 + L^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}}.$$

Следовательно:

$$w = \frac{J}{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h_1^2}} + \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h_1^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h_1^2 + L^2}} + \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{h_1^2 + L^2} \cdot \sqrt{h_1^2 + L^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} \right]. \quad (105)$$

В большинстве случаев практики высота h_1 мала и последнюю формулу можно упростить приняв $h_1 = 0$. Тогда получим формулу (106), весьма часто употребляющуюся при определении скоса потока у стабилизатора:

$$w = \frac{J}{\pi l} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{l}{2L}\right)^2} \right]. \quad (106)$$

Вводя в эту формулу $J = C_y V b$, вычисляем скос потока в градусах:

$$\Delta \alpha^\circ = 57,3 \frac{C_y}{\pi} \cdot \frac{b}{l} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{l}{2L}\right)^2} \right]. \quad (107)$$

В случае нескольких планов следует пользоваться формулою (105), беря для каждого плана соответствующую высоту h_1 и суммируя действия отдельных планов. При невысокой коробке планов можно пользоваться для всех планов одною и тою же формулою (106) или (107).

Так как скос пропорционален коэффициенту подъемной силы крыльев C_y , а величина C_y изменяется почти по линейному закону в зависимости от угла атаки, то можно заключить, что и скос будет линейной функцией угла атаки.

Действительно, полагая $C_y = k (\alpha_0 + \alpha)$, где k — коэффициент пропорциональности и α_0 — угол атаки при $C_y = 0$, мы получим для заданного расположения крыльев по формуле (107) следующую зависимость:

$$\Delta \alpha^\circ = \alpha_1^\circ + k_1 \alpha^\circ. \quad (180)$$

Здесь α_1° — некоторый угол и k_1 — коэффициент. Такими формулами часто пользуются американцы.

Интересно проследить, как изменяется скос потока у аэроплана при разных скоростях полета. Назовем вес самолета через G . Тогда в установившемся движении

$$C_y = \frac{G}{\rho S V^2}$$

и, следовательно:

$$\Delta \alpha = \frac{G}{\pi \rho S V^2} \cdot \frac{b}{l} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{l}{2L} \right)^2} \right] = \frac{\text{const}}{V^2}. \quad (109)$$

Таким образом, скос потока у стабилизатора обратно пропорционален квадрату скорости полета.

Проверка формулы (106) на опытах в аэродинамических лабораториях и на самолетах в полете показала, что она дает во многих случаях вполне удовлетворительный результат. Однако, в других случаях она дает сильно преуменьшенные значения скоса.

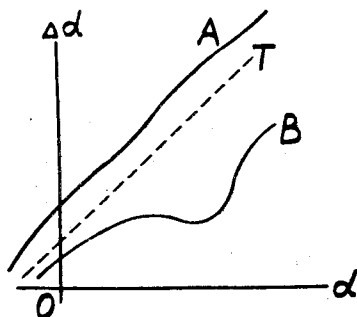
Объясняется это тем, что в действительности с крыла сбегает не два вихря, а целая вихревая пелена. Принимая эллиптический закон циркуляции, можно вывести приемом, аналогичным описанному, величину скоса; он оказывается тогда следующим:

$$\Delta \alpha^\circ = 57,3 \frac{4C_y}{\pi} \cdot \frac{S}{l^2} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{l}{2L} \right)^2 \right] \quad (110)$$

Скос, вычисленный по этой формуле, получается в среднем в 2 раза больше, чем дает формула (107). Легко убедиться, что при очень длинном хвосте в случае эллиптического закона скос получается в точности в два раза больше, чем при постоянной циркуляции. Для этого достаточно в форм. (107) и (110) положить

$$L = \infty.$$

К сожалению, вопрос о точности той или иной формулы до сих пор окончательно еще не решен. Большие затруднения на практике возникают еще от трудности учета влияния фюзеляжа на хвост. Так, в одном исследовании Аэродинамической Лаборатории Массачузетского Технологического Института (Америка) оказалось, что постановка фюзеляжа совершенно изменила даже вид кривых скоса (см. фиг. 56). Кривая А соответствует полученной из опыта величине $\Delta \alpha$ у модели самолета с вынута́м фюзеляжем. Кривая Т дает теоретическое значение, вычисленное по старой теории, а кривая В представляет тот же скос у модели с фюзеляжем.



Фиг. 56.

Протекание кривой В ясно показывает, что хвост самолета может при некоторых углах атаки попадать в „аэродинамическую тень“ фюзеляжа, где скорость потока будет совсем отличная от даваемых формулами (107) и (110).

Все это очень понижает надежность расчетов самолетов на устойчивость и заставляет предпочитать опыты с балансировкою моделей в трубах самым тонким расчетом.

В настоящее время почти во всех государствах требуется техническими условиями представление в надзирающие учреждения продувок модели каждого самолета нового типа, выпускаемого заводами. Без таких испытаний ни один новый самолет не должен выпускаться в воздух.

Вследствие ненадежности таких расчетов предлагались упрощенные формулы для определения скоса потока у хвоста самолета. Мунк предлагает брать для моноплана:

$$\Delta\alpha = \frac{3,6}{\pi} \frac{S}{l^2} C_y;$$

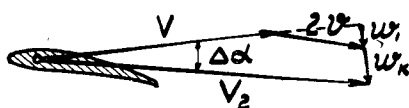
и для биплана и триплана:

$$\Delta\alpha = \frac{3}{\pi} \frac{S}{l^2} C_y.$$

Однако, некоторые опыты заставляют думать, что скос потока может быть иногда на 10% — 15% больше этих величин.

По всем этим формулам можно определять скос лишь для планирования машины. В случае полета на моторе явление может значительно осложниться.

Чаще всего считают, что скорость скоса w_k , вызванная крылом, и скорость „отбрасывания“ $2v$ в струе пропеллера не зависят друг от друга. Кроме того, довольно произвольно допускают, что скорость „отбрасывания“ у пропеллера всегда направлена по его оси (см. фиг. 57).



Фиг. 57.

Тогда окончательная величина скорости скоса w определится как сумма скосов от пропеллера w , и от крыльев w_k , т.-е.

$$w = w_i + w_k$$

и

$$\Delta\alpha = \frac{w}{V_2}.$$

Величины v и V_2 находятся по теории идеального пропеллера и, как известно, они могут быть выражены через коэффициент нагрузки B на ометаемую винтом площадь F следующими формулами:¹⁾

¹⁾ См. труды ЦАГИ, № 10, Б. Н. Юрьев, Воздушные гребные винты, стр. 126.

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{Q^1}{\rho F V^2}, \\ V_2 &= V \sqrt{1 + 2B} \\ 2v &= V(\sqrt{1 + 2B} - 1) \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

В эти формулы следует вводить не полную тягу винта Q , а „чистую“ тягу Q^1 , т.-е. тягу, уменьшенную на сопротивление всех частей самолета, омываемых струей винта и лежащих перед стабилизатором.

Определив угол скоса потока, легко далее найти угол атаки стабилизатора и определить затем действующую на него подъемную силу p по относительной скорости потока, приблизительно равной V_2 . Так как $V_2 > V$, то и сила, действующая на стабилизатор, при том же угле атаки будет больше при полете с мотором, чем при планировании. Назвав подъемную силу сперения для первого и второго случаев соответственно через p и p_0 , получим:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V_2}{V} \right)^2 = 1 + 2B, \quad (112)$$

т.-е. сила увеличится в отношении $(1 + 2B) : 1$. Однако, вследствие того, что струя имеет конечные по сравнению со стабилизатором размеры, ее действие несколько ослабляется. На основании некоторых английских опытов с моделями самолетов можно думать, что отношение будет приблизительно таково:

$$\frac{p}{p_0} \cong 1 + B. \quad (113)$$

ЧАСТЬ III.

ГЛАВА XIV.

Приложение теории индуктивного сопротивления к расчету статической устойчивости самолета.

Весьма важным приложением теории индуктивного сопротивления является возможность с ее помощью определять действующий на самолет в плоскости его симметрии момент при различных углах атаки крыльев. Этот момент представляет собою алгебраическую сумму моментов всех действующих на самолет сил относительно его центра тяжести. К таким силам относятся: силы, действующие на крылья, сила, действующая на оперение самолета, сила от фюзеляжа и тяга винта. Моменты последних двух сил бывают обычно очень малыми; при планировании на малом газу сила тяги винта обращается в нуль, а при остановленном винте — в небольшое сопротивление.

Таким образом, главными силами, дающими моменты относительно центра тяжести, являются силы, действующие на крыло и на хвост.

Мы здесь изложим так-называемый проверочный статический расчет самолета на продольную устойчивость.

Сперва разберем, какой момент получается от крыла. Для этого необходимо рассмотреть силы, действующие на крыло при разных углах атаки. Обычно вместо сил аэродинамическими лабораториями даются коэффициенты сопротивления C_y и C_x , и, кроме того, дается коэффициент момента — C_m относительно переднего конца хорды крыла E (см. фиг. 58), по которому момент находится в формуле

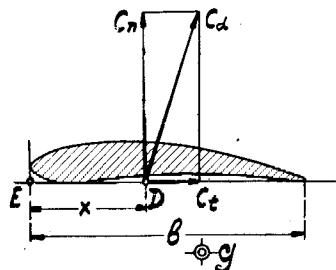
$$M_E = C_m \cdot \rho S V^2 b \quad (114)$$

или же дается положение „центра давления“

D при помощи величины x . Наша задача заключается в том, чтобы найти момент полной силы сопротивления

$$R = C_a \rho S V^2$$

(где $C_a = \sqrt{C_y^2 + C_x^2}$ — коэффициент полной силы) относительно центра тяжести G . Так как обычные коэффициенты C_y и C_x приспособлены главным образом к аэродинамическому расчету и отнесены вследствие этого



Фиг. 58.

Точно так же для направления OL найдем

$$C_l = C_x \cos \alpha - C_y \sin \alpha. \quad (117)$$

Это и есть нужные нам формулы перехода.

Иногда такой переход делают графически, для чего достаточно на кривой первого рода с равными масштабами для C_x и C_y измерить угол β ; вычитая из него соответствующий ему по отметкам угол атаки α , получают β_1 — угол отклонения от нормали к хорде вектора C_x на кривой Лилиенталя второго рода, т.е.:

$$\beta_1 = \beta - \alpha. \quad (118)$$

Измерив вектор C_x и откладывая его под углом β_1 в соответствующую сторону (+ по направлению к хвостику крыла), получим кривую Лилиенталя второго рода.

После этих предварительных замечаний переходим теперь к определению момента сил, действующих на крылья относительно центра тяжести аппарата (см. фиг. 61).

Эти силы сведутся к нормальной $C_n \rho SV^2$ и к тангенциальной $C_t \rho SV^2$. Кроме того, если мы эти силы отнесем к переднему концу хорды крыла (точка E), то получится аэродинамический момент:

$$M_E = C_m \rho SV^2 b. \quad (114)$$

Пусть центр тяжести самолета координирован относительно крыла величинами b_1 и h .

Как видим, при обычном расположении центра тяжести аппарата к моменту M_E прибавятся (алгебраически) еще моменты сил

$$C_n \rho SV^2$$

и

$$C_t \rho SV^2.$$

Условимся считать момент уменьшающий угол атаки за положительный.

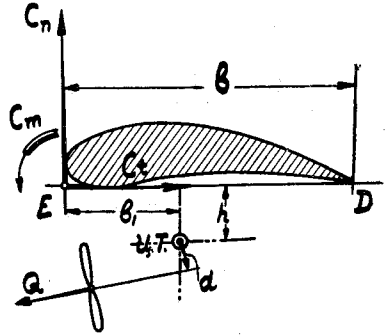
Тогда мы сможем написать

$$M_o = C_m \rho SV^2 b - C_n \rho SV^2 b_1 - C_t \rho SV^2 h,$$

где M_o — момент крыльев относительно центра тяжести. На практике для исключения скорости полета удобнее пользоваться не абсолютной величиною момента, а его коэффициентом C_{m_o} , вычисляя его таким образом:

$$C_{m_o} = \frac{M_o}{\rho SV^2 b} = C_m - C_n \frac{b_1}{b} - C_t \frac{h}{b}. \quad (119)$$

Из этой формулы ясно видно удобство величины C_n и C_t при расчете:



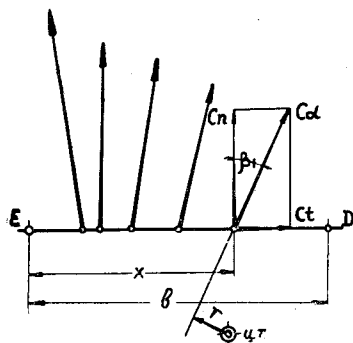
Фиг. 61.

устойчивости. При пользовании коэффициентами C_y и C_x нам пришлось бы в это выражение подставить значения C_n и C_t по формулам перехода и мы тогда получили бы

$$C_{m_0} = C_m - C_y \left(\frac{b_1}{b} \cos \alpha - \frac{h}{b} \sin \alpha \right) - C_x \left(\frac{b_1}{b} \sin \alpha + \frac{h}{b} \cos \alpha \right). \quad (120)$$

Как видим, получается довольно сложное выражение.

Иногда предпочитают находить момент графически. Для этого вычерчивают так-называемый „пучек сил“, действующих на крыло. Сперва вычерчивают в достаточно большом размере хорду крыла ED и затем наносят на нее центры давления и векторы коэффициентов полных сил для разных углов атаки (см. фиг. 62). Построение это очень просто и мы на нем останавливаться не будем.



Фиг. 62.

Для определения момента измеряем длину r перпендикуляра, опущенного из центра тяжести (Ц. Т.) на продолжение вектора C_α . Тогда момент очевидно будет равен:

$$M_0 = C_\alpha \rho S V^2 r, \quad (121)$$

а коэффициент момента

$$C_{m_0} = \frac{M_0}{\rho S V^2 b} = C_\alpha \frac{r}{b}. \quad (122)$$

В случае полета с мотором необходимо определять и момент тяги винта относительно центра тяжести (см. фиг. 61). Пусть тяга винта будет Q и ее плечо a . Тогда искомый момент может быть написан в виде:

$$M_Q = - Q \cdot a$$

или

$$C_{mQ} = - \frac{Qa}{\rho S V^2 b} = - \frac{a}{b} \cdot \frac{F}{S} \cdot B, \quad (123)$$

где величина B есть коэффициент нагрузки на ометаемую винтом площадь F , т.-е.

$$B = \frac{Q}{\rho F V^2}.$$

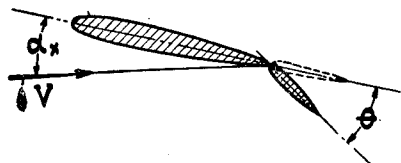
Так как величина Q является функцией только скорости полета V (при полной мощности мотора), а эта скорость зависит лишь от угла атаки α , то и величина C_{mQ} будет функцией только α .

Таким образом легко определить момент крыла или, в полиплане, крыльев по изложенным формулам. В полиплане только придется исходить из истинных углов атаки и учитывать скос потока от взаимной индукции крыльев. Момент тяги винта учитывается также без затруднений.

Переходим теперь к наиболее важному вопросу, а именно к определению момента, получающегося от хвоста самолета.

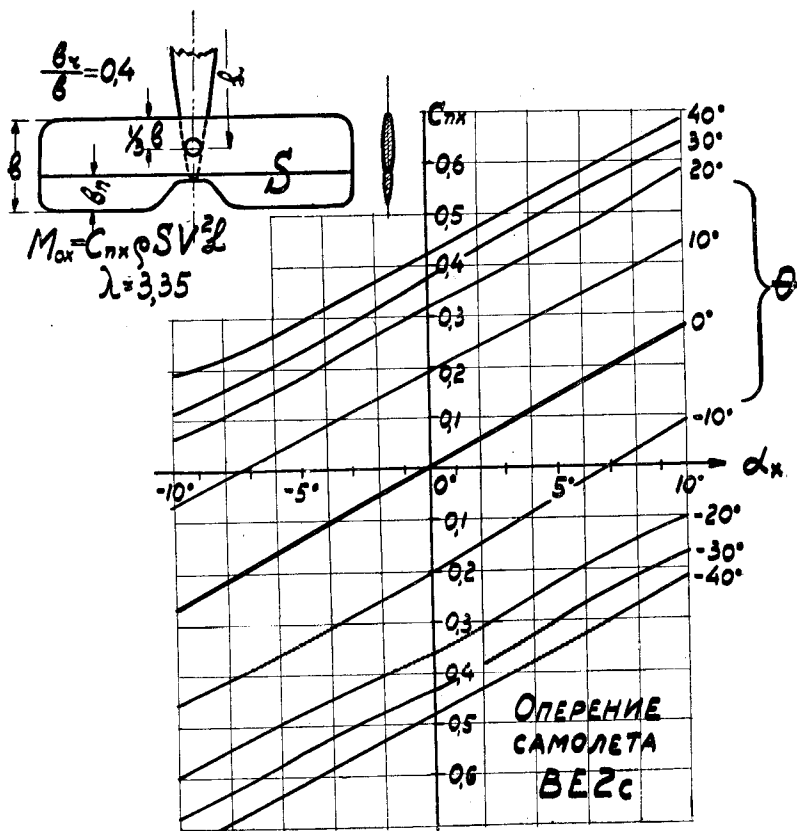
Хвосты самолетов неоднократно изучались в аэродинамических лабораториях. Обычно при этом модель хвоста испытывается отдельно от модели самолета, просто как „крыло“. Тогда скаса потока перед хвостом от влияния крыльев самолета не получается.

Примем следующие обозначения (см. фиг. 63): угол атаки стабилизатора обозначим α_x , отклонение руля высоты от плоскости „хорды“ стабилизатора обозначим через Θ . Площадь всего хвоста будет s и площадь руля высоты s_r .



Фиг. 63.

Обдувку хвоста в лабораториях производят, устанавливая руль под разными углами отклонения Θ . Результаты испытаний хвостового оперения изображаются чаще всего в виде кривых, дающих коэффициент нормальной силы C_{nx} , отнесенной ко всей поверхности горизонтального оперения (см. фиг. 64).



Фиг. 64.

Кривые C_{nx} обычно очень близки к прямым линиям и поэтому часто в расчетах их и принимают за прямые. Тогда сила p , нормальная к хорде стабилизатора, определится так:

$$p = C_{nx} \rho s V_x^2. \quad (124)$$

Мы вводим сюда не скорость полета самолета V , а скорость V_x , которая получится в действительности за самолетом в том месте, где находится хвост.

Момент хвоста относительно Ц.Т. аппарата может быть написан так:

$$M_{ox} = pL = C_{px} \rho s V_x^2 L, \quad (125)$$

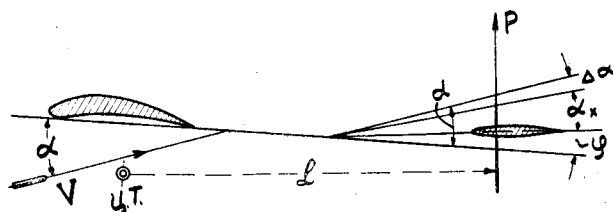
где L — расстояние от первой $1/3$ полной хорды оперения до Ц.Т. аппарата¹⁾. Другими словами, мы здесь пренебрегаем движением центра давления силы p , действующей на хвост. Это мы делаем вследствие ничтожной величины этого перемещения по сравнению с плечом L .

Для сравнения этого момента с моментом от крыльев, вычислим коэффициент момента хвостового оперения по той же формуле, как он вычислялся для крыльев:

$$C_{мох} = \frac{M_{ox}}{\rho S V^2 b} = C_{px} \frac{sL}{Sb} \cdot \left(\frac{V_x}{V} \right)^2. \quad (126)$$

Так как при разборе устойчивости исходят из угла атаки крыльев α , а угол атаки хвоста будет другой — α_x , то необходимо связать обе эти величины.

Рассмотрим летящий самолет (см. фиг. 65). Пусть крылья имеют угол атаки α . Хвост обычно устанавливается на самолете так, что хорда крыльев и хорда хвоста образуют некоторый угол φ — так-называемую деградацию стабилизатора или угол продольного v . Угол атаки стабилизатора найдется очень легко по чертежу:



Фиг. 65.

$$\alpha_x = \alpha - \varphi - \Delta\alpha \quad (127)$$

В случае полета с мотором придется написать:

$$\alpha_x = \alpha - \varphi - \Delta\alpha',$$

где α' должно быть

найдено по описанному в гл. XIII способу.

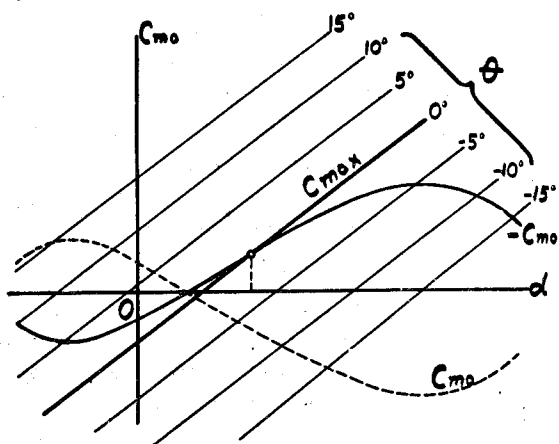
Окончательный результат представляют обычно в виде двух кривых, изображающих $C_{мо}$ и $C_{мох}$ в зависимости от α (см. фиг. 66).

Так как эти величины пропорциональны моментам, действующим на самолет, то очевидно, что равновесие, в смысле отсутствия вращения аппарата, будет возможно лишь тогда, когда коэффициент момента от крыльев будет равен коэффициенту момента от хвоста. Для удобства сравнения этих кривых предпочитают наносить на диаграмму (фиг. 66) коэффициент момента крыльев с обратным знаком, получается кривая $-C_{мо}$. Точка, в которой пересечется кривая $-C_{мо}$ с харак-

¹⁾ Точнее — длина перпендикуляра, опущенного из Ц.Т. на перпендикуляр к хорде оперения, проведенный в точке хорды, лежащей на $1/3$ от переднего его конца. Кроме этого момента, получится еще момент от лобовых сил оперения, — однако он очень мал и его в расчет вводить не следует.

теристикой хвоста с нулевым отклонением руля высоты, определит угол атаки, при котором эти моменты взаимно уравниваются. Такой угол атаки называется углом балансировки самолета.

При случайном отклонении машины от угла балансировки могут быть два случая. Первый, когда кривая хвоста пойдет круче, чем кривая крыльев; тогда при изменении угла атаки самолета он будет вращаться в сторону восстановления прежнего положения. Величина коэффициента вращающего момента будет равна $C_{мох}$ — $C_{мо}$; на чертеже она представится разностью ординат обеих кривых.



Фиг. 66.

Во втором случае может получиться, что кривая крыльев пойдет круче, чем кривая $C_{мох}$, тогда аппарат будет при случайных отклонениях стремиться все больше и больше отойти от положения равновесия (балансировки).

В первом случае самолет называется устойчивым, во втором — неустойчивым. Возможен случай, когда обе кривые — $C_{мох}$ и $C_{мо}$ пойдут, сливаясь на значительном протяжении. В таком случае машина называется нейтральной.

Во все формулах моментов от хвоста у нас фигурирует выражение

$$\left(\frac{V_x}{V}\right)^2,$$

т.е. отношение скорости потока у хвоста к скорости полета.

При планировании следует, повидимому, считать

$$V_x \approx 0,9 V$$

и этим оценивать тормозящее действие фюзеляжа, шасси и крыльев на набегающий на хвост поток воздуха.

При полете же на моторе следует вводить множитель

$$1 + B = \left(\frac{V_x}{V}\right)^2$$

и оценивать изменение угла атаки хвоста приемом, описанным в предыдущей главе.

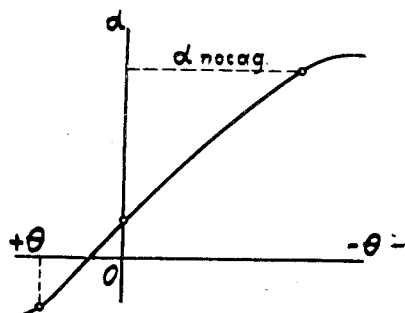
Что касается вопроса относительно того, насколько следует делать машину устойчивой, не составлено еще окончательного мнения. Немцы считают правильным делать самолет нейтральным при планировании, — тогда при полете с мотором машина станет вполне устой-

чивою. Англичане иногда требуют, чтобы машины были устойчивы даже при брошенной летчиком ручке управления, т.е. при рулях, свободно „болтающихся“ по ветру.

Вообще же чаще всего считают, что для фигурных машин желательна малая устойчивость или даже продольная „нейтральность“; для машин же тяжелых предпочитают иметь большой запас устойчивости, позволяющий бросать рули, что требуется, например, при смене летчиков во время полета.

Сравнивая кривую — C_{mo} с кривыми C_{mox} для разных отклонений руля высоты θ , получим в точках пересечения этих кривых величины углов атаки, при каких получится равенство действующих на самолет моментов, т.е. равновесие машины.

По этим данным можно построить весьма полезную „балансирующую диаграмму“, дающую угол атаки самолета в зависимости от отклонения руля высоты (см. фиг. 67).



Фиг. 67.

Такие кривые легко получают также опытным путем в аэродинамических лабораториях при продувках моделей самолетов.

По ним легко проверить, достаточно ли сильны рули, чтобы позволить машине лететь со всеми нужными углами атаки, так как на практике бывали, например, случаи, что машины, вполне уравновешенные, не могли лететь с посадочным углом атаки из-за слабости руля высоты, что обуславливало у них большую посадочную скорость.

Знание истинного угла атаки стабилизатора позволяет вычислить и усилие, какое надо приложить летчику к ручке управления. Для этого пользуются результатами специальных продувок рулей в аэродинамических лабораториях, которые изображаются обычно при помощи кривых, дающих „коэффициент шарнирного момента руля“ $C_{ш}$ для разных углов атаки оперения α_x и разных углов отклонения руля θ (см. фиг. 68). По такому коэффициенту момента находят самый момент по формуле:

$$M_{ш} = C_{ш} \cdot \rho s V^2 x b; \quad (128)$$

здесь s — площадь всего оперения и b — полная его хорда (руль + стабилизатор). Зная действующий на руль момент, легко далее найти по правилам Статики усилие, действующее на тросс и на ручку управления.

В настоящее время имеется уже много опытов с различными рулями, сделанных как с моделями аэропланов в аэродинамических трубах, так и с самолетами в натуре¹⁾.

¹⁾ См., напр., Reporta. Memoranda, № 679. BACA. Model experiments on the pitching moment and hinge moment due to elevators on BE 2 c. by H. B. Irving and A. S. Batson

Для быстрых и грубых подсчетов можно пользоваться английскими приближенными формулами следующего вида:

$$M_{\text{ох}} = k \theta \rho s V^2 x L \quad (129)$$

$$M_{\text{ш}} = 0,0045 \cdot \theta \rho s_r b_r V^2 x. \quad (130)$$

Здесь s_r — площадь руля и b_r — длина его хорды и θ — угол в градусах. Величина k изменяется в зависимости от отношения хорды руля ко всей хорде оперения, т.е. от величины $\frac{b_r}{b}$. Ее можно брать из таблицы IX.

Таблица IX.

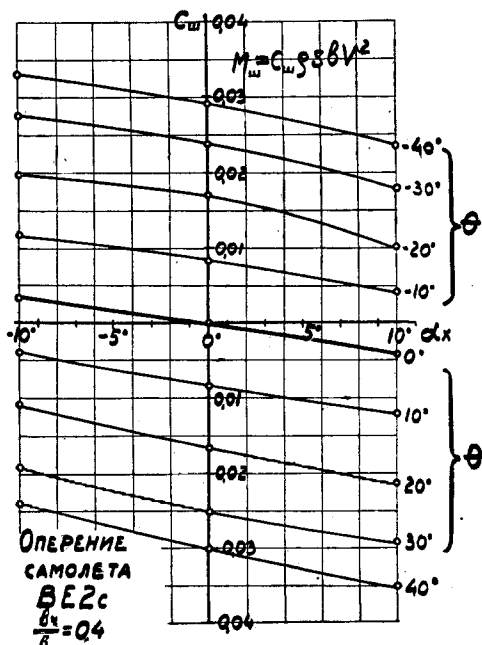
b_r/b	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2
k	0.0206	0.0200	0.0188	0.0162	0.0124

При некоторых режимах полета усилие на ручку может получиться столь большим, что летчик не сможет удержать руль в нужном положении. При этом могут получиться два случая: первый — когда летчик не может поставить машину на некоторые режимы, например, на пикирование, и второй, — когда летчик не сможет вернуть машину из некоторых режимов в правильное положение. Первый случай не опасен, второй же представляет очень большую опасность, так как попадание подобной машины на такие „критические углы атаки“ кончается обычно катастрофой.

Отсюда видим, что полное исследование статической устойчивости должно касаться не только моментов, действующих на весь самолет, но и усилий, получающихся на ручке управления при разных режимах полета.

Если при таком проверочном расчете машина окажется неустой-

чивою или неуравновешенною, то нужно будет изменить хвостовое оперение. Из формулы (125) ясно, что момент хвоста увеличивается при увеличении его площади s и выноса L . Следовательно, если оставить неизменным угол атаки стабилизатора, то линия $S_{\text{тох}}$ пойдет тем круче, чем больше будет величина произведения sL .



Фиг. 68.

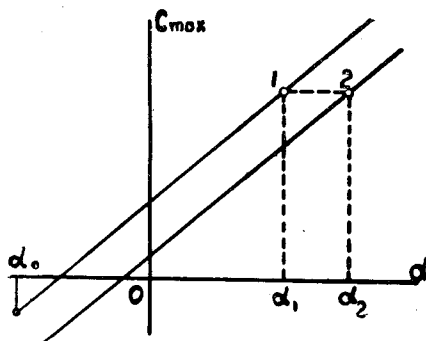
Если изменить угол установки стабилизатора, то, как легко усмотреть из формулы (127), истинный угол атаки оперения увеличится на ту же величину, на какую увеличится угол φ , ибо α и $\Delta\alpha$ зависят лишь от крыла и расстояния L . Таким образом, если при угле атаки самолета α_1 мы имеем определенную величину для $C_{\text{тох}}$, то после поворота стабилизатора на угол $\Delta\varphi$ эта величина придется на угол атаки α_2 , при чем

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\varphi.$$

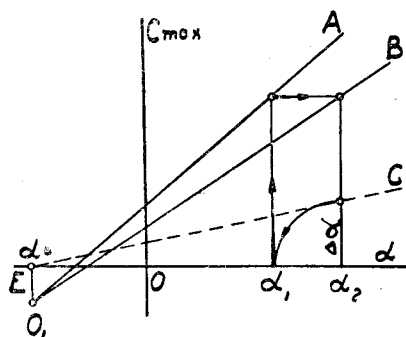
Этот сдвиг будет одинаковым для всех углов атаки и, следовательно, при изменении угла установки стабилизатора кривая моментов от хвоста лишь передвигается на диаграмме параллельно самой себе (см. фиг. 69), а наклон ее не изменяется. Это рассуждение справедливо как для кривых $C_{\text{тох}}$ с нулевым отклонением руля, так и для кривых с разными Θ .

При расчетах можно кривые $C_{\text{тох}}$ нанести на кальку, тогда, наложив ее на кривую — $C_{\text{то}}$ (момента от крыльев с обратным знаком), легко подобрать угол установки стабилизатора φ , нужный для получения равновесия при заданных условиях полета.

На всех диаграммах мы наносим кривую $C_{\text{тох}}$ с учетом скоса потока от крыльев. Рассмотрим теперь, как влияет скос на кривую $C_{\text{тох}}$.



Фиг. 69.



Фиг. 70.

Если бы мы сделали определение $C_{\text{тох}}$ без учета скоса, то получили бы кривую O_1A (см. фиг. 70). На самом деле будет существовать скос потока $\Delta\alpha$, зависящий от угла атаки крыльев самолета α и приближенно выражающийся прямою линиею EC . При этом отрезок $EO = \alpha_0$ даст угол атаки при нулевой подъемной силе крыльев, при котором и скос потока $\Delta\alpha = 0$.

Теперь легко видеть, что $C_{\text{тох}}$, соответствующий точке 1, получится лишь тогда, когда угол атаки α_1 увеличится на величину скоса потока $\Delta\alpha$, соответствующего углу атаки $\Delta\alpha_2$. Следовательно, точка 1 переместится в точку 2, как указано на чертеже стрелкою.

Вследствие линейного закона изменения всех величин линия O_1A обратится в линию O_1B . Отсюда получаем вывод, что влияние скоса как бы поворачивает линию $C_{\text{тох}}$ около точки O_1 на некоторый угол,

величина которого зависит от пропорций аэроплана. В среднем оказывается, что для обычных соотношений наклон линии O_1B близок к половине наклона линии O_1A , т.-е.

$$\operatorname{tg}(O_1B; O\alpha) \approx \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}(O_1A; O\alpha).$$

В ненормальных случаях могут получиться и весьма большие отклонения от этих средних соотношений.

До сих пор мы излагали обычный прием расчета статической устойчивости самолета. Однако в нем имеется одно довольно большое неудобство, а именно — он требует довольно кропотливой работы как по определению момента, действующего на крылья, так и момента хвоста. При этом все эти кривые изменяются при изменении положения центра тяжести аппарата, и при исследовании, например, машины с переменной нагрузкой эти кривые приходится несколько раз перестраивать.

Гораздо удобнее оставить без изменения обычную характеристику оперения, т.-е. кривую C_{nx} в зависимости от α_x , и нанести на нее ту величину C_{nx} , какая необходима для достижения равновесия машины. Другими словами, мы ищем сперва нормальную силу p_k , действующую на хвост и дающую момент, равный моменту от крыльев:

$$p_k = \frac{M_{ok}}{L} = \frac{C_{mo} \rho S V^2 b}{L}.$$

По силе находим необходимую величину коэффициента на хвосте:

$$C_{nxk} = \frac{p_k}{\rho S V_x^2} = \frac{C_{mo} \rho S V^2 b}{\rho S V_x^2 L} = C_{mo} \frac{bS}{LS} \left(\frac{V}{V_x} \right)^2. \quad (131)$$

Совершенно аналогично найдем давление на хвост, зависящее от тяги винта:

$$C_{nxQ} = \frac{Qa}{L \cdot \rho S V_x^2} = \frac{Q}{\rho F V^2} \cdot \frac{aF}{sL} \left(\frac{V}{V_x} \right)^2 = B \frac{aF}{sL} \left(\frac{V}{V_x} \right)^2. \quad (132)$$

Полная сила или, вернее, коэффициент, необходимый для равновесия, будет таков:

$$C_{nx} = -(C_{nxk} + C_{nxQ}). \quad (133)$$

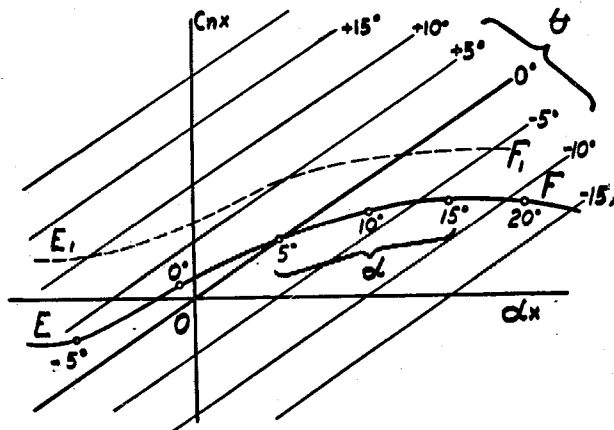
Здесь берем перед алгебраической суммой в скобках знак минус, чтобы получить не действующую силу, а уравновешивающую.

Мы умеем уже находить по углу атаки крыльев угол атаки оперения — для этого служит ур-ие (127):

$$\alpha_x = \alpha - \varphi - \Delta\alpha. \quad (127)$$

Пользуясь уравнениями (127) и (133), мы можем найти величину C_{nx} для разных α и определить соответствующие α_x .

Нанося парные значения величин α_x и C_{nx} на диаграмму (фиг. 71) в виде точек с отметками на них углов атаки крыльев α , мы получим кривую EF, позволяющую исследовать все вопросы статической устойчивости машины.



Фиг. 71.

Так, напр., из диаграмм сразу видно, что машина сбалансирована для полета под углом $\alpha \approx 5^\circ$.

Она устойчива, так как при отклонениях от положения равновесия сила, действующая на оперение (при $\theta = 0$), больше силы, необходимой для равновесия.

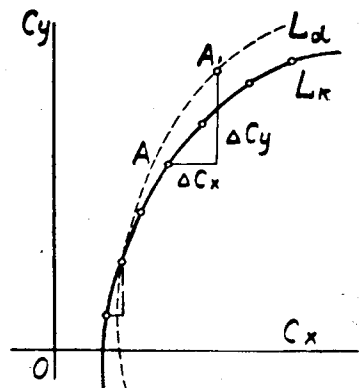
Далее на этой диаграмме непосредственно видно, какому углу атаки α соответствует любой задний угол θ отклонения руля высоты.

При различных изменениях в машине, например, при разных нагрузках и, следовательно, изменении положения ее центра тяжести, а также при конструктивных изменениях машины, кривые хвоста остаются неизменными и меняется лишь форма кривой EF, например, она принимает вид кривой F_1E_1 . Не представляет никакого труда ввести в кривую EF влияние обдувки винта, так как во все формулы входит отношение $\left(\frac{V}{V_x}\right)^2$ и скорость V_x может браться из каких угодно расчетов, например, она может быть получена описанным в предыдущей главе приемом.

Мы не будем здесь входить в дальнейшие подробности по расчету статической устойчивости самолета и ограничимся лишь уже сказанным.

Мы дополним наше изложение еще одною задачею, тесно связанною с излагаемой здесь теорией, а именно — вопросом об исправлении кривой Лилиенталя самолета на влияние хвоста.

Очевидно, зная истинный угол атаки оперения и имея его продувку, не представляет никакого труда найти действующие на него силы и затем вычислить поправки, какие надо сделать в кривой Лилиенталя L_k , построенной лишь для крыльев самолета. Эти поправки ΔC_y и ΔC_x перенесут точку A в точку A_1 , и исправленная кривая Лилиенталя будет изображена линиею L_a (см. фиг. 72).



Фиг. 72.

Однако, в большинстве случаев у конструктора не имеется полных продувок хвоста, а лишь кривые C_{nx} в зависимости от α_x .

Тогда можно поступить так: считаем $C_{nx} \approx C_{yx}$, — это вносит совершенно ничтожную погрешность. Далее считаем, что вертикальная сила, действующая на хвост, будет равна

$$p_x = C_{nx} \rho S V_x^2,$$

т.е. мы пренебрегаем проекцией на вертикаль сил лобового сопротивления хвоста.

Эта сила p_x увеличит (или уменьшит) подъемную силу аэроплана, что может быть представлено как увеличение коэффициента подъемной силы крыльев на величину ΔC_y . Очевидно:

$$\Delta C_y = \frac{p_x}{\rho S V^2} = \frac{C_{nx} \rho S V_x^2}{\rho S V^2} = C_{nx} \frac{s}{S} \cdot \left(\frac{V_x}{V} \right)^2. \quad (134)$$

Ищем теперь величину добавочного сопротивления Q_x , вносимого оперением:

$$Q_x = Q_p + Q_i = Q_p + p_x (\Delta \alpha_x + \Delta \alpha) \quad (135)$$

Здесь Q_p — профильное сопротивление оперения, мало зависящее как от его угла атаки, так и от отклонения руля высоты θ , и Q_i — его индуктивное сопротивление.

Величина индуктивного сопротивления получится умножением силы p_x на полный скос потока, состоящий здесь, во-первых, из скоса от самоиндукции хвоста [см. форм. (77)]

$$\nabla \alpha_x = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{s}{l_x^2} C_y \approx \frac{2}{\pi} \frac{s}{l_x^2} C_{nx}. \quad (136)$$

где l_x — размах оперения, и, во-вторых, из скоса потока от крыльев и винта равного $\Delta \alpha$ и определяемого по уже изложенным правилам.

Силу Q_x можно представить, как появляющуюся в результате увеличения коэффициента лобового сопротивления крыльев на величину ΔC_x , т.е.

$$\Delta C_x = \frac{Q_x}{\rho S V^2} = \frac{C_{px} \rho S V_x^2}{\rho S V^2} + \frac{C_{nx} \rho S V_x^2}{\rho S V^2} (\Delta \alpha_x + \Delta \alpha)$$

или

$$\Delta C_x = \left[C_{px} + C_{nx} (\Delta \alpha_x + \Delta \alpha) \right] \frac{s}{S} \left(\frac{V_x}{V} \right)^2. \quad (136)$$

При помощи величин ΔC_y и ΔC_x , вычисленных для разных α , легко перестроить простую кривую Лилиентала крыльев самолета на кривую Лилиентала для всего самолета с учетом оперения.

ГЛАВА XV.

Применение теории индуктивного сопротивления для общих исследований полетных свойств аэропланов.

Теория индуктивного сопротивления позволяет подойти к решению целого ряда общих вопросов аэропланостроения с весьма широкой точки зрения. Вследствие этого в настоящее время во многих исследованиях по теории аэроплана ею охотно пользуются.

Конечно, не следует забывать, что теория эта имеет лишь приближенный характер и получаемые с ее помощью все более сложные выводы и заключения точно также несут все те ограничения и неточности, какими обладала и первоначальная теория. Тем не менее этим приемом могут быть получены весьма полезные для целей практики общие заключения ¹⁾.

Мы остановимся здесь на одном примере, а именно — разборе влияния режима самолета на его полетные свойства и, в частности, решим вопрос о наибольшем полном весе, поднимаемом аэропланом при заданных его размерах и мощности мотора ²⁾.

Выведем сперва основные формулы, служащие для расчета аэроплана.

Подъемная сила и сопротивление выражаются обычно при помощи основных формул экспериментальной аэродинамики таким образом:

$$P = G = \rho C_y S V^2 \quad (137)$$

$$Q = \rho C_x S V^2. \quad (138)$$

Обозначения применяем мы здесь прежние, уже встречавшиеся в этой книге. Полезная мощность напишется так:

$$T\eta = Q \cdot V = \rho C_x S V^3. \quad (139)$$

Здесь T — мощность мотора в кг.м./сек. и η — коэффициент полезного действия винта.

При расчете аэроплана обычно считают, что коэффициент подъемной силы всего самолета равен коэффициенту подъемной силы крыльев. Другими словами, здесь пренебрегают подъемною силою всех остальных частей самолета, например, фюзеляжа.

Лобовое же сопротивление самолета разбивают на две части — на сопротивление крыльев, так называемое полезное, и сопротивление всех остальных частей — вредное.

Вредное сопротивление для наглядности представляют обычно при помощи сопротивления некоторой эквивалентной вредной

¹⁾ Особо широко применена к расчету аэроплана теория индуктивного сопротивления в книге Н. Bader, Grundlagen der Flugtechnik. 1920.

²⁾ Доклад автора на торжественном заседании во 2-ю годовщину смерти проф. Н. Е. Жуковского.

плоской поверхности; назвав площадь такой поверхности через σ , мы сможем выразить вредное сопротивление аэроплана Q_b формулой:

$$Q_b = \rho 0,64 \sigma V^2.$$

В этой формуле коэффициент сопротивления плоской поверхности принят равным 0,64.

Для удобства расчета и возможности нанесения вредного сопротивления на кривую Лилиенталя, предпочитают пользоваться вместо силы Q_b условным коэффициентом вредного лобового сопротивления, определяя его так:

$$C = \frac{Q_b}{\rho S V^2} = \frac{\rho 0,64 \sigma V^2}{\rho S V^2} = 0,64 \frac{\sigma}{S}. \quad (141)$$

Величина $\frac{\sigma}{S}$ заключается у современных аэропланов в довольно узких пределах — обычно между 0,015 — 0,025. Эта величина очень мало зависит от угла атаки самолета и в технических расчетах ее часто считают постоянной.

Переходим теперь к сопротивлению крыльев. Мы уже знаем, что оно состоит из двух частей: профильного сопротивления и индуктивного.

Таким образом, коэффициент полного сопротивления самолета может быть написан в виде суммы трех членов:

$$C_x = C_i + C_p + C_b. \quad (142)$$

Если на кривой Лилиенталя (см. фиг. 73) отложить влево величину $C_b = 0,64 \frac{\sigma}{S}$ и провести новую ось ординат O_1B , то старая кривая Лилиенталя будет в этих новых осях с началом в O_1 представлять уже кривую Лилиенталя для всего самолета. Как мы видели в предыдущей главе, она, кроме того, весьма немного изменится за счет действия оперения самолета.

Для получения общих заключений принимают, что профильное сопротивление будет постоянным для всех углов атаки.

Тогда мы можем принять:

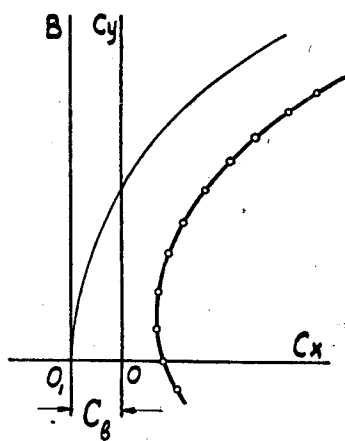
$$C_p + C_b = C_c = \text{const}, \quad (143)$$

и коэффициент лобового сопротивления всего самолета может быть написан в виде:

$$C_x = C_i + C_c. \quad (144)$$

При различных углах атаки самолета величина C_i имеет разное значение, так как

$$C_i = A C_y^2. \quad (145)$$



Фиг. 73.

Введем новую величину ξ — характеристику режима самолета, определяя ее, как отношение коэффициента индуктивного сопротивления к коэффициенту постоянного, т.-е.

$$\xi = \frac{C_i}{C_c} \quad (146)$$

С помощью этой величины и соотношения $C_i = A C_y^2$ исключаем из основной формулы (137) C_y и находим скорость полета, выраженную через вес самолета:

$$V = \sqrt{\frac{G}{\rho C_y S}} = \sqrt[4]{\frac{1}{\xi}} \cdot \sqrt[4]{\frac{A}{C_c}} \cdot \sqrt{\frac{G}{\rho S}} \quad (147)$$

Таким же приемом получим из форм. (139) скорость полета, выраженную через мощность мотора:

$$V = \sqrt[3]{\frac{T\eta}{\rho(1+\xi)C_c S}} = \sqrt[3]{\frac{1}{1-\xi}} \cdot \sqrt[3]{\frac{T\eta}{\rho C_c S}} \quad (148)$$

Точно также легко выразить при помощи этих величин и форм. (138) потребную для полета машины тягу винта, равную в установившемся движении сопротивлению самолета:

$$Q = \rho C_c (1 + \xi) S V^3 = \rho C_c (1 + \xi) S \sqrt{\frac{1}{\xi}} \cdot \sqrt{\frac{A}{C_c}} \cdot \sqrt{\frac{G}{\rho S}}$$

или

$$Q = \frac{1 + \xi}{\xi^{1/2}} \cdot \sqrt{C_c A} \cdot G \quad (149)$$

Найдем теперь величину веса самолета G , выразив ее через мощность мотора. Из форм. (137) получаем, подставив в нее скорость полета, выраженную через мощность по форм. (148), и величину C_y по форм. (145), следующее выражение:

$$G = \rho \sqrt{\frac{\xi C_c}{A}} \cdot S \frac{T^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{2}{3}}}{\rho^{\frac{2}{3}} C_c^{\frac{2}{3}} S^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{(1+\xi)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{(1+\xi)^{\frac{2}{3}}} \rho^{\frac{1}{3}} C_c^{\frac{1}{3}} A^{\frac{1}{6}} S^{\frac{1}{2}} T^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{2}{3}} \quad (150)$$

Эта любопытная формула связывает почти все величины, характеризующие аэроплан. В нее можно подставить выражение A по приближенной формуле проф. Л. Прандтля, т.-е.

$$A = \frac{2\pi}{\pi\lambda + 4(n-1)} \quad (44)$$

Затем в нее можно ввести в явной формуле влияние высоты полета, для чего можно воспользоваться формулой Эверлинга, дающей ρ в зависимости от высоты полета h :

$$\rho = \rho_0 \cdot 0,9^{\frac{h}{1000}} \quad (151)$$

Здесь $\rho_0 \approx \frac{1}{8}$ соответствует полету у земли. Мощность мотора на высоте будет меньше, чем у земли, и, как известно, можно принять, что индикаторная мощность будет изменяться пропорционально плотности, а механические потери T_m мотора будут постоянными ¹⁾ и от высоты полета независимыми. Следовательно, можно положить, что:

$$T = (T_{io} 0,9^{\frac{h}{1000}} - T_m). \quad (152)$$

Здесь T_{io} — индикаторная мощность мотора у земли. Таким образом, мы можем окончательно написать:

$$G = \frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{(1+\xi)^{1/2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{3000} \cdot 0,9^{-\frac{1}{6}} C_c \left(\frac{2\pi}{\pi\lambda + 4(p-1)} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{S} \frac{2}{3} \left(T_{io} 0,9^{\frac{h}{1000}} - T_m \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (153)$$

Хотя эта формула и не может претендовать на очень большую точность, однако она весьма ценна в том отношении, что в ней ясно видно влияние каждого фактора на подъемную силу самолета.

Например, из нее легко усмотреть большое влияние на грузоподъемность самолета относительно размаха его крыльев λ . В случае моноплана, т.е. для $p=1$, получим, при неизменности остальных величин, пропорциональность подъемной силы величине $\sqrt{\lambda}$. Таким образом, увеличивая в два раза размах машины, мы увеличим ее подъемную силу в 1,4 раза.

Из этой же формулы сразу видно, что постоянные лобовые сопротивления влияют на грузоподъемность самолета очень мало, так как величина C_c изменяется у современных самолетов в довольно тесных пределах (примерно от 0,015 до 0,022), а корень шестой степени этих величин будет изменяться в еще более узких границах (примерно от 0,5 до 0,53). Понятно, что на скорости полета лобовые сопротивления отразятся много сильнее, — это и видно из формулы (148).

Формулу (153) можно использовать также для вывода поправок при конструировании самолетов. Дело в том, что конструктор бывает часто вынужден изменить какой-либо размер самолета уже тогда, когда все расчеты сделаны. Например, приходится изменить на небольшую величину мощность мотора. Тогда можно поступить так: продифференцировать нужное выражение, например, подъемную силу, по изменившейся величине и заменить дифференциалы конечными приращениями. При этом следует считать все остальные величины постоянными. Тогда получим:

$$\frac{\partial G}{\partial T} \approx \frac{\Delta G}{\Delta T} = \varphi,$$

¹⁾ Число оборотов мотора считаем при этом постоянным.

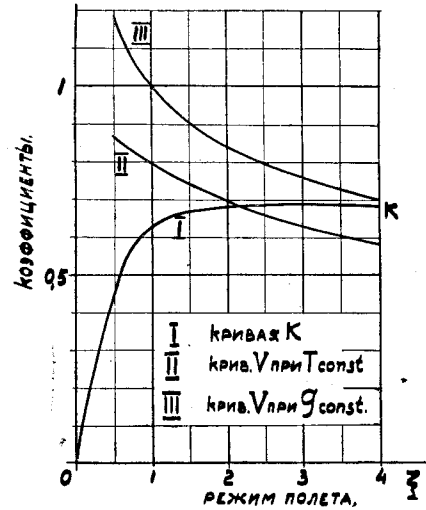
отсюда

$$\Delta G = \varphi \cdot \Delta T. \quad (154)$$

По последней формуле легко найти поправку, вычислив φ для некоторого среднего значения T .

Очень интересно проследить, как изменяется грузоподъемность самолета с изменением его режима, т.е. величины ξ .

Найдем сперва подъемную силу для самолета с заданными всеми величинами, стоящими в правой части ур-ия (153). Тогда окажется, что подъемная сила будет пропорционально выражению:



Фиг. 74.

$$\frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{(1+\xi)^{\frac{2}{3}}} = k. \quad (155)$$

На диаграмме фиг. 74 представлено изменение этой величины для разных режимов; в таблице X приведены соответствующие числовые значения.

Легко видеть, что при некотором режиме, характеризуемом некоторою величиною ξ , получится максимум грузоподъемности. Для точного нахождения этой величины дифференцируем предыдущее выражение и по общему правилу получим уравнение:

$$\frac{dk}{d\xi} = \frac{(1+\xi)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \xi^{-\frac{1}{2}} - \xi^{\frac{1}{2}} (1+\xi)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3}}{(1+\xi)^{\frac{4}{3}}} = 0.$$

Решая его относительно ξ , найдем:

$$\xi = 3. \quad (156)$$

Этот режим называется экономическим режимом самолета. При заданной мощности мотора он соответствует максимуму грузоподъемности, а при заданном весе аэроплана — минимуму мощности.

Следует, однако, заметить, что режим $\xi = 3$ может быть достигнут лишь у крыльев с весьма малым лобовым сопротивлением, обычно уже при режиме $\xi = 2$ наступает нарушение постоянства профильного сопротивления и вся теория делается не верною. Однако, кривая изменения k в зависимости от ξ протекает столь плавно, что даже при режиме $\xi = 1$ подъемная сила уменьшается лишь на 8,4% по отношению к максимуму.

Таблица X.

Характеристика режима $\xi =$	$1/2$	1 наивыгод.	2	3 экономич.	4
I. Подъемная сила пропорциональна $k = \frac{\xi^{1/2}}{(1 + \xi)^{2/3}}$	0.448	0.630	0.680	0.688	0.685
Уменьшение подъемной силы по сравнению с максимальной .	— 34 ⁰ / ₀	— 8.4 ⁰ / ₀	— 1.16 ⁰ / ₀	0 ⁰ / ₀	— 0.58 ⁰ / ₀
II. Скорость полета при заданной мощности пропорциональна . $\sqrt[3]{\frac{1}{1 + \xi}}$	0.873	0.793	0.692	0.630	0.584
III. Скорость полета при заданном весе пропорциональна $\sqrt[4]{\frac{1}{\xi}}$	1.186	1	0.84	0.76	0.707

Вследствие этого формула (153) дает во всех случаях достаточно хорошее для общих исследований приближение к действительности.

При расчете самолетов часто пользуются еще **на и в ы г о д н е й ш и м** режимом, при котором сила сопротивления самолета достигает для заданного веса наименьшего значения.

Мы уже вывели формулу для сопротивления самолета — форму (149). Найдём теперь величину характеристики режима ξ , дающую минимум этого выражения. По общему правилу находим:

$$\frac{d \frac{1 + \xi}{\xi^{1/2}}}{d \xi} = \frac{\frac{1}{2} \xi^{-1/2} - (1 + \xi)^{-1/2}}{\xi} = 0.$$

Отсюда

$$\xi = 1. \quad (157)$$

Обращаясь к первоначальному смыслу величины $\xi = \frac{C_i}{C_c}$ видим, что при экономическом режиме индуктивное сопротивление в 3 раза больше постоянного, т.е.:

$$C_i = 3 C_c = 3 (C_p + C_b). \quad (158)$$

При **на и в ы г о д н е й ш е м** режиме индуктивное и постоянные сопротивления равны друг другу:

$$C_i = C_c = C_p + C_b. \quad (159)$$

Эти положения были выведены очень давно Ш. Ренаром и носят названия теоремы Ренара. В выводе самого Ренара вместо постоянного сопротивления фигурировало лишь вредное, а сопротивление крыла считалось пропорциональным α^2 ; в том виде, как мы

вывели здесь эти соотношения, их можно назвать обновленную теоремой Ренара.

Понятно, что эти выводы несколько схематичны, так как в них не учитывается изменяемость коэффициента полезного действия винта при разных скоростях полета.

Можно, конечно, ввести в формулу (153) также и эту зависимость; однако, для тех общих принципиальных выводов, для каких пользуются такими общими формулами, нет особой необходимости это делать.

Для иллюстрации правдоподобности получаемых по формуле (153) числовых значений вычислим грузоподъемность монопланов с высотой полета в 2000 метров. Сперва упростим формулы, положив при малых высотах, что мощность мотора T изменяется с высотой пропорционально плотности воздуха, т.е. положим $T = 0,9 \frac{h}{1000} T_0$, где T — мощность на высоте h метров и T_0 — мощности у земли. Тогда формула (153) примет вид:

$$G = \frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{(1+\xi)^{\frac{2}{3}}} \cdot 0,9 \frac{h}{1000} C^{\frac{1}{6}} \left(\frac{\pi \lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}} S^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{2}{3}} T_0^{\frac{2}{3}}. \quad (160)$$

Разделив обе части этого равенства на S , получим связь между весовой нагрузкой единицы площади крыльев $p = \frac{G}{S}$ и моторною нагрузкою той же площади $m_0 = \frac{N_0}{S} = \frac{T_0}{75 \cdot S}$, т.е. числом „земных“ лошадиных сил N_0 приходящихся на 1 кв. метр поверхности крыльев:

$$p = \frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{(1+\xi)^{\frac{2}{3}}} 0,9^2 C^{\frac{1}{6}} \left(\frac{\pi \lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{2}{3}} m_0^{\frac{2}{3}} 75^{\frac{2}{3}}. \quad (161)$$

Вводя сюда, как средние значения для таких машин, $\lambda = 6$; $\eta = 0,7$, $C_s = 0,015$ и принимая $\xi = 3$, найдем окончательно:

$$m_0 \approx \left(\frac{p}{13}\right)^{3/2}. \quad (162)$$

Вычисляя для разных p соответственные m_0 , получим:

$p = 10$	20	30	40	50	70	100 кг/м ²
$m_0 = 0,675$	1,91	3,52	5,4	7,56	12,5	21,3 сил/м ²

Найденные этим приемом цифры очень близки к тем, какие действительно наблюдаются на практике.

Подобный прием расчета может быть с успехом применен не только для исследования грузоподъемности, но и для решения целого ряда других вопросов теории аэроплана. Так, в таблице X мы дали изменения скорости полета для разных режимов, при чем в одном случае мы исходили из заданного веса аппарата, а в другом — из заданной

мощности мотора. Для удобства в этой таблице даны не самые скорости полета, а лишь множители формул (147) и (148), зависящие от ξ , т.-е. величины, пропорциональные скорости полета.

Из этой таблицы видим, например, что машина заданного веса полетит при экономическом режиме со скоростью, составляющей 0,76 от скорости наивыгоднейшего режима.

Много и других, весьма ценных заключений можно сделать в этой области при помощи теории индуктивного сопротивления. Однако, мы не будем развивать здесь полную теорию аэроплана и ограничимся лишь изложенным.

ГЛАВА XVI.

Влияние вырезов в крыле и шайб на его концах на его аэродинамические свойства.

В аэропланостроении чаще всего приходится употреблять прямоугольные крылья. Однако, лишь в редких случаях удается применить крыло на самолете в целом виде, — обычно в нем приходится делать те или иные вырезы для помещения фюзеляжа или для улучшения обзора.

Немецкие опыты показали, что фюзеляж, поставленный в вырез крыла, развивает подъемную силу, довольно близкую к подъемной силе вырезанного участка крыла (примерно около $\frac{2}{3}$ ее). Вследствие этого, при определении индуктивного сопротивления крыла с пересекающим его фюзеляжем, можно считать крыло как бы целым, на что мы и указывали в главе IV.

Однако, при установке крыльев очень близко над или под фюзеляжем, так, что между крыльями и фюзеляжем получается просвет, общее лобовое сопротивление может сильно увеличиться и дойти даже, при крыле снизу, до удвоенной величины сопротивления, вычисленного как сумма сопротивлений изолированных крыла и фюзеляжа.

Гораздо сильнее отражаются на аэродинамических свойствах крыльев делаемые в них иногда сквозные вырезы.

Опыты ЦАГИ показали, что у крыла с рядом простых щелей подъемная сила может упасть в несколько раз.

С другой стороны, при помощи косых каналов типа Хенли Пейдж или Лахмана можно значительно увеличить максимальную подъемную силу крыла.

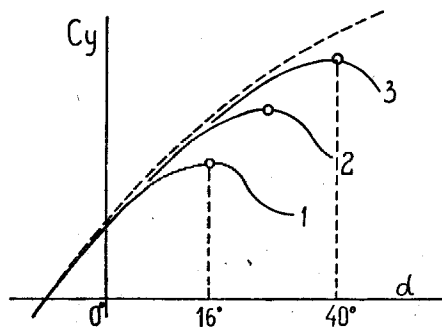
У таких „прорезных крыльев“ подъемная сила при данном угле атаки не увеличивается, но благодаря возможности применять у них углы атаки значительно большие, чем у обычных крыльев, и подъемная сила может быть значительно увеличена.

У обыкновенного крыла подъемная сила изменяется при увеличении угла атаки почти по прямой линии (теоретически — по синусоиде¹⁾), но при приближении к некоторому критическому углу атаки, к „по-

¹⁾ См. работы Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина.

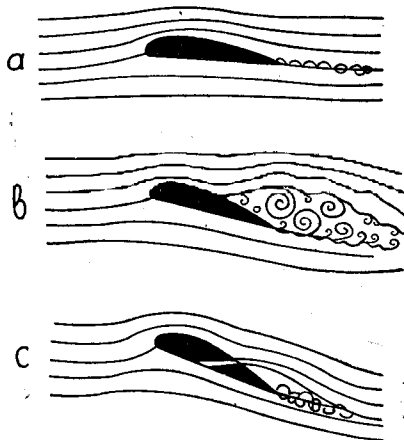
садочному" углу, она начинает отклоняться от этой линии и вскоре начинает падать. На фиг. 75 пунктиром нанесена теоретическая кривая, кривая 1 дает протекание коэффициента подъемной силы для простого крыла, а кривые 2 и 3 — для прорезных.

Таким образом, у прорезного крыла отодвигается момент отклонения действительной кривой C_y от теоретической.



Фиг. 75.

Исследование потока около крыльев показало, что уменьшение подъемной силы происходит в момент сильного нарушения обтекания крыла. На фиг. 76 представлено течение воздуха около простого крыла при малых углах атаки (а) и при больших (b); как видим, происходит срыв струй с верхней поверхности крыла и образование сильного завихрения.



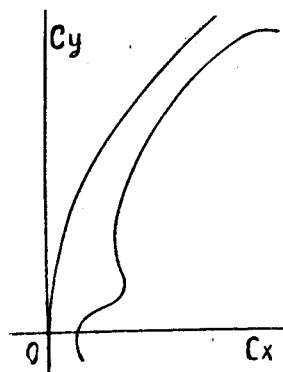
Фиг. 76.

При устройстве в крыле щелей из них вылетают с большой скоростью струи воздуха и как бы сметают образующиеся за крылом вихри, не давая им накопляться в большую завихренную область (с).

Следовательно, прорезные крылья лишь обеспечивают плавное течение воздуха до больших углов атаки. Так как подъемная сила

примерно пропорциональна $\alpha_0 + \alpha$, то, увеличив посадочный угол в $2-2\frac{1}{2}$ раза, мы тем самым можем увеличить и подъемную силу крыла во столько же примерно раз. Уже удавалось достигать без значительного срыва струй до угла атаки в 45° , что позволяло получать $C_{y \text{ макс}} = 1,8$ вместо обычного, равного в среднем 0,6.

Это свойство прорезных крыльев пытаются в настоящее время использовать для уменьшения посадочной скорости самолета. Однако увеличение $C_{y \text{ максим.}}$ сопровождается довольно значительным увеличением лобового сопротивления крыла на малых углах атаки и как раз на



Фиг. 77.

тех, на которых собственно и совершается нормальный полет аэроплана. Кривая Лилиентала для обычных прорезных крыльев имеет вид, данный на фиг. 77. Это обстоятельство крайне неприятно, так

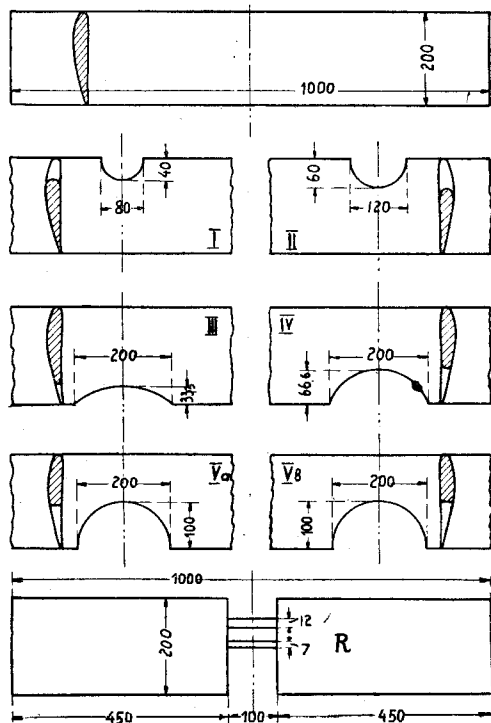
как летные свойства аэроплана с прорезными крыльями сильно ухудшаются. Вследствие этого в настоящее время делается много попыток так усовершенствовать эти крылья, чтобы они при нормальном полете не слишком сильно ухудшались по сравнению с целыми крыльями. Для этого делают щели или закрывающимися, или же выбирают их положение на крыле так, что их влияние оказывается ничтожным при нормальном полете. В этом отношении выгодными оказываются крылья со щелями, расположенные близко к задней кромке крыльев.

В настоящее время по этому вопросу уже имеется большой материал как экспериментальный, так и теоретический, и мы поэтому более на нем останавливаться не будем и отошлем интересующихся к первоисточникам (см. библиографический указатель в конце этой книги ¹⁾).

Переходим теперь к оценке влияния вырезов в крыле, делаемых для улучшения обзора летчиков.

Опыты лаборатории Прандтля показали на неожиданно большое влияние этих вырезов.

На фиг. 78 даны формы вырезов, испытанных в Лаборатории Прандтля. Вверху изображено целое крыло; рис. III, IV, Va и Vb представляют крылья с обычными задними вырезами, рис. I и II дают крылья с передними вырезами, как это часто встречается у пассажирских монопланов со свободно несущими крыльями и, наконец, на рис. R, изображено крыло с „просветом“, через который проходят лишь лонжероны в обтекателях; — эта комбинация встречается иногда у больших аэропланов.



Фиг. 78. Крылья с различными вырезами в центральной части.

На графике фиг. 79 представлены результаты опытов с крыльями с задним вырезом. Как видим, лишь при очень умеренных вырезах происходит малое уменьшение лобового сопротивления. При сколько-нибудь значительном вырезе явление происходит так, как будто значительно возросло профильное сопротивление крыла.

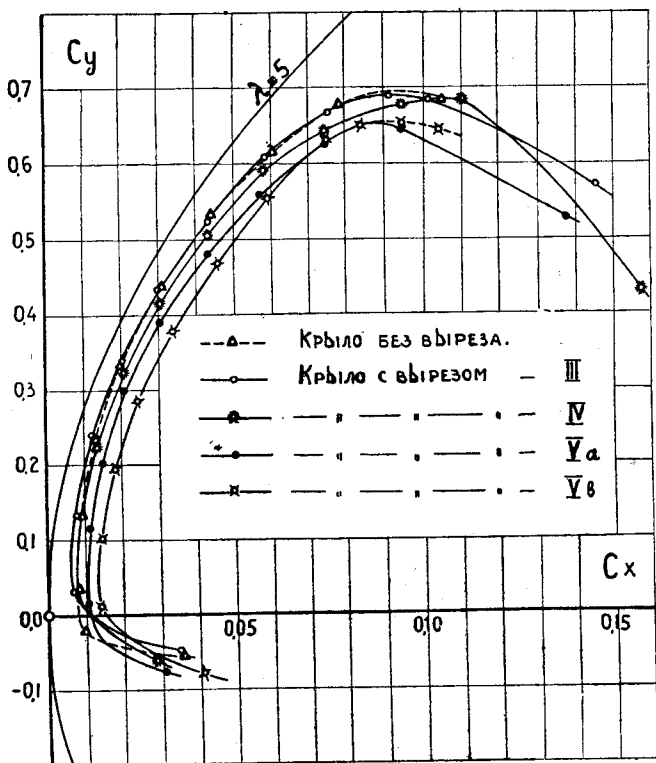
В случае передних вырезов оказывается, что при малых углах атаки их влияние невелико, но при больших углах атаки оно стано-

¹⁾ В настоящее время ЦАГИ prepares к печати сборник статей по прорезным крыльям. Уже имеется 10 статей, переведенных Н. П. Лесниковой.

вится весьма большим (см. фиг. 80). Лобовое сопротивление таких крыльев возрастает внезапно, скачком, после достижения некоторого критического угла атаки. Это обстоятельство очень плохо отражается на лётных свойствах машины, главным образом на ее потолке.

Приведенными кривыми следует пользоваться при аэродинамических расчетах самолетов для оценки влияния вырезов в крыльях

на кривую Лилиенталя.



Фиг. 79. Задние вырезы.

Профессором Л. Прандтлем была сделана попытка подвести теоретический базис под это явление. Для этого он решил наиболее простую задачу о работе двух крыльев с малым промежутком между ними (см. фиг. 81). Оказалось, что влияние даже весьма малых просветов очень велико. На той же фигуре дана теоретическая кривая для поправочного коэффициента κ для обычной формулы индуктивного сопротивления:

$$C_i = \kappa \frac{2}{\pi} \cdot \frac{S}{l^2} C_y^2.$$

Величина κ является функцией отношения $\frac{d}{l}$, где d — ширина щели и l — размах крыла.

Мы видим из диаграммы, что уже при щели всего лишь в 0,075 размаха можно считать, что оба крыла работают не как одно крыло, а как два отдельных.

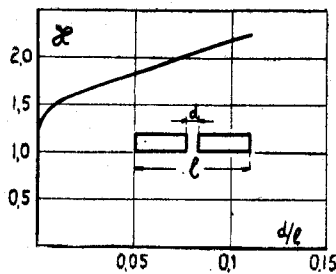
Из этих опытов с полной ясностью вытекает требование избегать каких бы то ни было щелей при прикреплении крыльев к фюзеляжу и ограничиваться самыми малыми вырезами в крыльях для улучшения обзора с самолета.

При изучении вопросов индуктивного сопротивления сама собою возникает мысль о возможности при помощи искусственных приспособлений уменьшить влияние вихрей на крыло. К простейшим приспособ-

соблениям этого рода относятся шайбы на концах крыльев (см. фиг. 82), они многократно предлагались разными конструкторами и даже неоднократно осуществлялись на практике.

Теорию таких крыльев разрабатывал Ф. Нагель¹⁾, опыты же велись в ЦАГИ и в Геттингене.

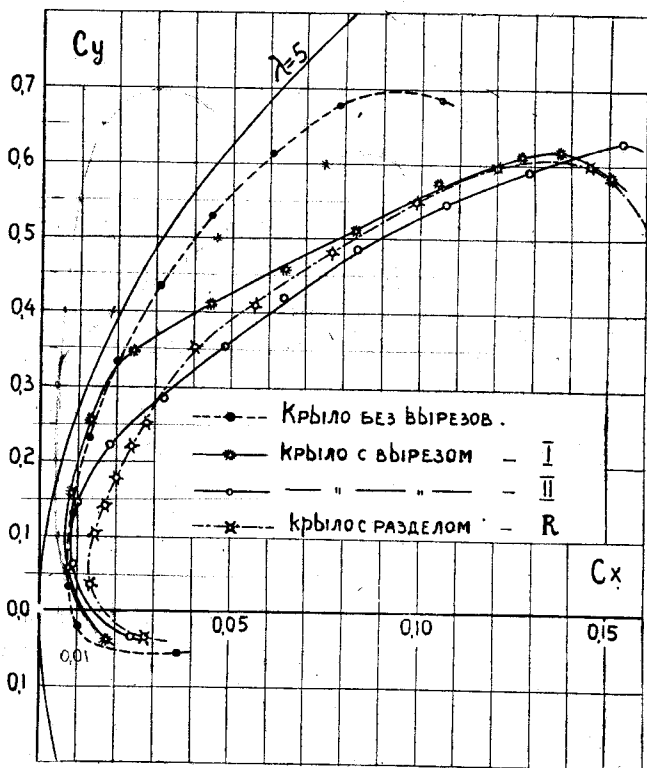
По теории Нагеля получилось, что главное влияние оказывает высота шайбы h и для индуктивного сопротивления такого крыла можно принять формулу:



Фиг. 81.

правилем, а именно—нужно брать вместо действительного размаха крыльев l размах, увеличенный с каждой стороны на $\frac{2}{5}$ высоты шайбы, т.е. $l + \frac{4}{5} h$, тогда получится, при заданных скорости полета и подъемной силе, некоторое уменьшение лобового сопротивления.

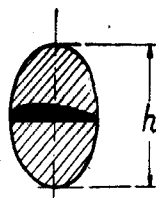
Однако, уменьшение это не велико, почему такие крылья и не нашли до сих пор широкого применения на практике.



Фиг. 80.

$$Q_i = \frac{P^2}{4\rho V^2 \left(\frac{\pi}{8} + 0,6515 \frac{h}{l} \right) l^2}$$

Опыт в общем довольно хорошо подтверждает эту формулу. На основании опытов можно пользоваться при расчетах еще более простым



Фиг. 82.

¹⁾ F. Nagel. Vorläufige Mitteilungen der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. Heft 2. 1924.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Изложенным далеко не исчерпывается вся теория индуктивного сопротивления крыльев. Мы здесь могли остановиться лишь на главнейших ее положениях, уже нашедших приложение в практических расчетах самолетов.

В настоящее время, помимо многочисленных теоретических сочинений, имеется по этому вопросу также и обширный экспериментальный материал, полученный как на опытах с моделями, так и при полетных испытаниях. Этот материал ввиду его обширности нами почти не был затронут.

Совершенно было оставлено в стороне приложение теории индуктивного сопротивления к расчету гребных винтов. Область расчета винтов в настоящее время настолько обособилась от общей аэромеханики, что представлялось не рациональным вводить в настоящую работу вырванную главу из теории винтов.

Однако, даже изложенный здесь неполный материал показывает на огромное значение этой теории для конструктора и исследователя самолетов. Целый ряд важнейших вопросов оказывается решенным при помощи этой теории, основанной на нескольких теоремах гидродинамики относительно вихрей, и целый ряд фактов связывается ею в одно стройное целое.

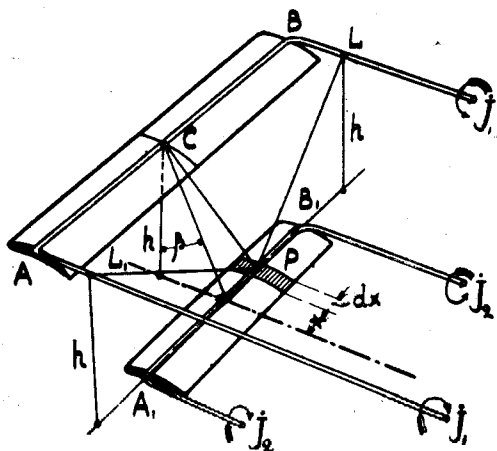
Дополнение

К Г Л А В Е V.

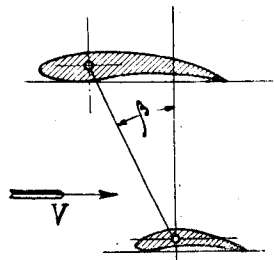
В главе V мы изложили расчет бипланной коробки по способу Бетца, т.-е. при помощи формул (32), (33) и (36), в которых фигурируют линейные размеры коробки a , c , l среднее и h .

В некоторых случаях предпочитают пользоваться другими формулами, с явно входящим углом β выноса верхнего крыла по отношению к нижнему (см. фиг. 83). Такой способ изложен в книге Norf Fuchs, Aerodynamik, пользующейся большим распространением среди наших конструкторов. Там же приведены графики, весьма облегчающие пользование формулами этого вида.

Вследствие этого мы здесь изложим в краткой форме вывод этих формул, основанных на гипотезе П-образных вихрей (см. фиг. 84). Ме-



Фиг. 84.



Фиг. 83.

тод применяется здесь прежний; — берем на присоединенном вихре нижнего крыла $A_1 B_1$ точку P с абсциссой x и вычисляем возникающую в ней вертикальную скорость от влияния вихрей верхнего крыла.

Затем вычисляем среднюю скорость по нижнему крылу. Следовательно, ход расчета будет таков: сперва находим по уже описанным в главе I правилам скорость, получающуюся от присоединенного вихря AB верхнего крыла. Она будет направлена перпендикулярно к плоскости PAB и будет иметь величину:

$$v' = \frac{J_1 \cos \beta}{4\pi h} \left[\frac{\frac{1}{2} l_1 + x}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} l_1 + x\right)^2 + \frac{h^2}{\cos^2 \beta}}} + \frac{\frac{1}{2} l_1 - x}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} l_1 - x\right)^2 + \frac{h^2}{\cos^2 \beta}}} \right].$$

Правый вихревой ус В верхнего крыла даст скорость v'' , перпендикулярную к плоскости PLB, при чем:

$$v'' = \frac{J_1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{l_1}{2} - x\right)^2}} \left[1 + \frac{h \sin \beta}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{l_1}{2} - x\right)^2 \cos^2 \beta}} \right].$$

Левый ус вызовет скорость v''' , перпендикулярную к плоскости PL₁A и равную

$$v''' = \frac{J_1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{l_1}{2} + x\right)^2}} \left[1 + \frac{h \sin \beta}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{l_1}{2} + x\right)^2 \cos^2 \beta}} \right].$$

Проектируем эти скорости на направление полета и на перпендикуляр к нему, получим скорость, возникшую в точке Р от влияния верхнего крыла, а именно горизонтальную $\Delta V_{21} = v' \cos \beta$ и скорость скоса

$$w_{21} = v' \sin \beta + v'' \frac{\frac{l_1}{2} - x}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{l_1}{2} - x\right)^2}} + v''' \frac{\frac{l_1}{2} + x}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{l_1}{2} + x\right)^2}}.$$

Вычисляем теперь средние по размаху нижнего крыла скорости ΔV_{21} и w_{21} , для чего интегрируем предыдущие выражения по x и делим результат на l_2 , затем подставляем вместо J_1 равную ей величину

$$\frac{P_1}{\rho V l_1} = \frac{C_{y1} S_1}{l_1} V.$$

Таким образом получаем:

$$\frac{\Delta V_{21}}{V} = - \frac{C_{y1} S_1}{2\pi l_1 l_2} \mu \quad (163)$$

$$\Delta \alpha_{21} = \frac{C_{y1} S_1}{2\pi l_1 l_2} (\nu + \kappa). \quad (164)$$

Здесь величины μ , ν и κ введены для сокращения. Их можно вычислить при помощи вспомогательных величин:

$$l_1 = \frac{l_1 + l_2}{2h}$$

и

$$l_2 = \frac{l_1 - l_2}{2h}.$$

После детального подсчета можно получить следующие выражения:

$$\mu = \mu(l_1) - \mu(l_2), \text{ где } \mu(l) = \cos \beta [\sqrt{1 + l^2 \cos^2 \beta} - 1]$$

$$\nu = \nu(l_1) - \nu(l_2), \text{ где } \nu(l) = \sin \beta [\sqrt{1 + l^2 \cos^2 \beta} - 1] + \\ + \ln \frac{(1 + \sin \beta) \sqrt{1 + l^2}}{\sin \beta + \sqrt{1 + l^2 \cos^2 \beta}}$$

$$x = x(l_1) - x(l_2), \text{ где } x(l) = \frac{1}{2} \ln(1 + l^2).$$

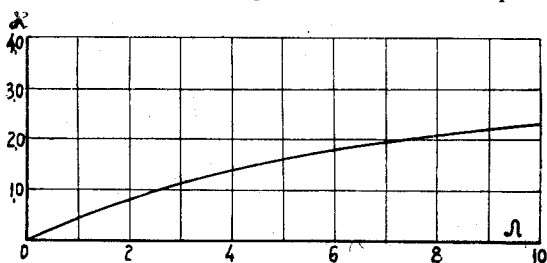
Совершенно аналогичным приемом найдем и для верхнего крыла:

$$\frac{\Delta V_{12}}{V} = \frac{C_{y2} S_2}{2 \pi l_1 l_2} \mu \quad (163')$$

$$\Delta \alpha_{12} = - \frac{C_{y2} S_2}{2 \pi l_1 l_2} (\nu - x). \quad (164')$$

Вычисление величин $\mu(l)$, $\nu(l)$ и $x(l)$ довольно хлопотно и для избежания сложных расчетов предпочитают в этом способе пользоваться заранее составленными графиками, которые мы здесь и прилагаем (см. фиг. 85, 86 и 87).

Таким образом, для расчета сложной коробки крыльев по формулам (163), (164), (163') и (164') нужно сперва вычислить величины l_1 и l_2 и дальше, найдя по графикам соответственные величины коэффициентов $\mu(l_1)$, $\mu(l_2)$, $\nu(l_1)$, $\nu(l_2)$, $x(l_1)$ и $x(l_2)$, вычислить:



Фиг. 85.

$$\mu = \mu(l_1) - \mu(l_2)$$

$$\nu = \nu(l_1) - \nu(l_2)$$

$$x = x(l_1) - x(l_2).$$

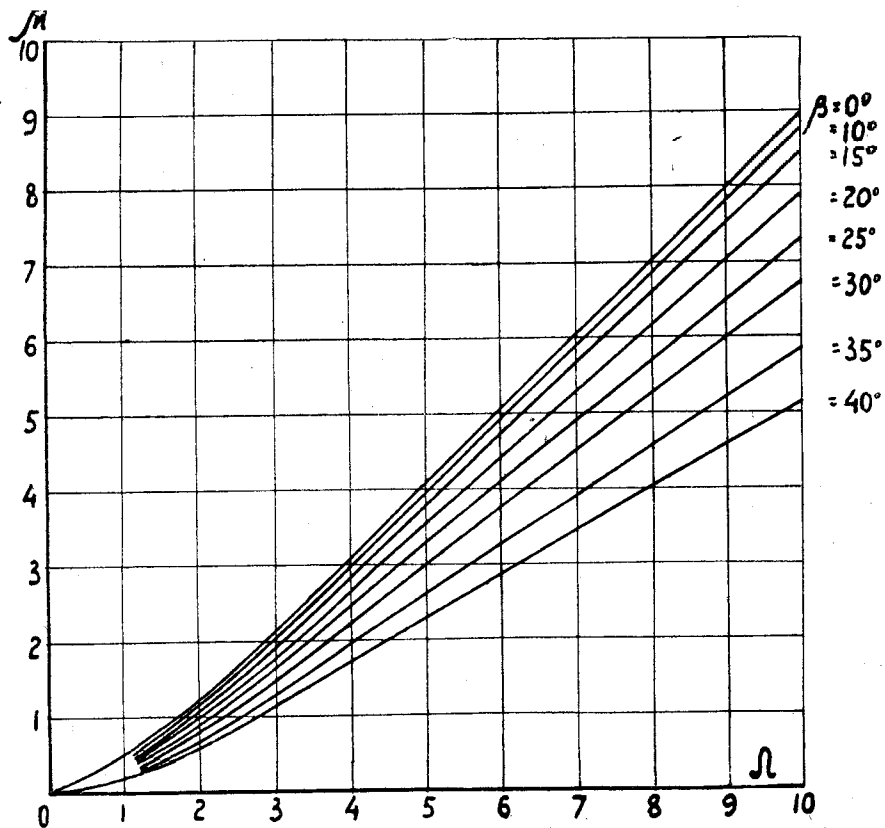
Пользуясь далее формулами (163) и (164), находим ΔV и $\Delta \alpha$. Самый процесс вычисления можно вести или способом последовательных приближений и угадываний, или же чисто аналитически.

В первом случае он ничем не отличается от уже описанного в главе V способа; во втором же случае он представляет некоторые особенности, на каких мы сейчас и остановимся.

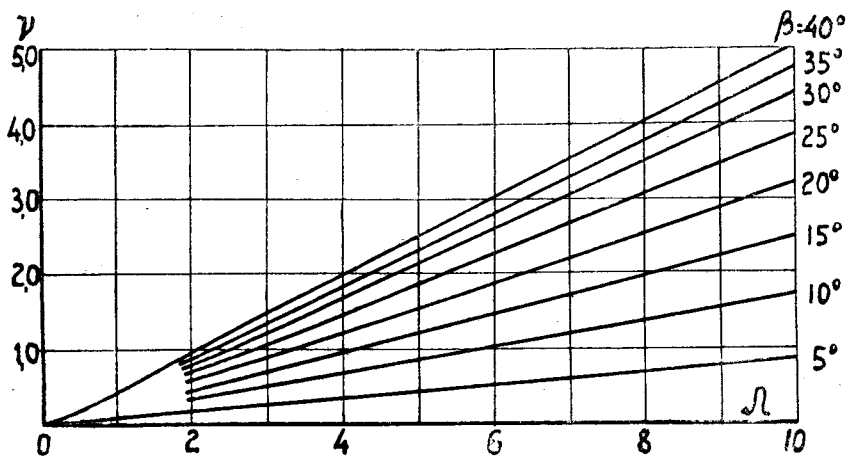
Рассмотрим действующие на крыло силы, возникающие от скоса потока, получившегося от индукции соседнего крыла. Пусть на фиг. (88) представлены силы P и Q , действующие на изолированное крыло. От влияния соседнего крыла поток изменит свое направление и будет течь

уже по направлению $A'O$ и, кроме того, изменится и его скорость на некоторую величину ΔV .

Применяя строку Тейлора и ограничиваясь первыми ее членами, мы можем написать для малого изменения действующих на крыло сил, происшедшего от изменения угла атаки на величину $\Delta\alpha$ и скорости на величину ΔV , следующие, формулы:



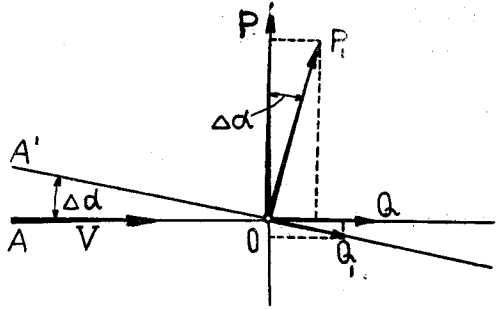
Фиг. 86.



Фиг. 87.

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= P - \frac{dP}{d\alpha} \Delta\alpha + \frac{dP}{dV} \Delta V \\ Q_1 &= Q - \frac{dQ}{d\alpha} \Delta\alpha + \frac{dQ}{dV} \Delta V \end{aligned} \right\} \quad (165)$$

Здесь P_1 и Q_1 обозначают силы, соответствующие измененному углу атаки, отнесенные к направлению потока A^1O . Так как нам желательно знать изменение первоначальных сил P и Q , отнесенных к направлению потока в бесконечности, т.е. к направлению AO , то мы должны силы P_1 и Q_1 спроектировать на направления AO и на перпендикуляр к нему (см. фиг. 88). Эти новые силы мы рассматриваем как измененные на некоторые небольшие величины ΔP и ΔQ первоначальные силы P и Q ; при таких условиях мы можем написать:



Фиг. 88

$$\begin{aligned} P + \Delta P &= P_1 \cos \Delta\alpha - Q_1 \sin \Delta\alpha \\ Q + \Delta Q &= Q_1 \cos \Delta\alpha + P_1 \sin \Delta\alpha. \end{aligned}$$

Считая угол скоса малым, мы можем положить

$$\cos \Delta\alpha = 1 \text{ и } \sin \Delta\alpha = \Delta\alpha.$$

Подставляя в предыдущие формулы величины P_1 и Q_1 по формуле (165) и отбрасывая члены второго порядка малости, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{dP}{dV} \Delta V - \frac{dP}{d\alpha} \Delta\alpha - Q \cdot \Delta\alpha \\ \Delta Q &= \frac{dQ}{dV} \Delta V - \frac{dQ}{d\alpha} \Delta\alpha + P \cdot \Delta\alpha. \end{aligned}$$

Подсчеты показывают, что величина $\frac{dP}{d\alpha}$ по сравнению с

$$\frac{dP}{d\alpha}$$

очень мала и, следовательно, может быть отброшена в первом уравнении. Заменяя силы коэффициентами и вычислив производные, получаем окончательно:

$$\left. \begin{aligned} \Delta C_{y21} &= -\frac{\mu S_1}{\pi l_1 l_2} C_{y1} C_{y2} - \frac{57,3}{2\pi} (v+x) \frac{S_1}{l_1 l_2} C_{y1} \frac{dC_{y2}}{d\alpha} \\ \Delta C_{y12} &= \frac{\mu S_2}{\pi l_1 l_2} C_{y1} C_{y2} + \frac{57,3}{2\pi} (v-x) \frac{S_2}{l_1 l_2} C_{y2} \frac{dC_{y1}}{d\alpha} \\ \Delta C_{x21} &= -\frac{\mu S_1}{\pi l_1 l_2} C_{y1} C_{x2} - \frac{v+x}{2\pi} \cdot \frac{S_1 C_{y1}}{l_1 l_2} \left(57,3 \frac{dC_{x2}}{d\alpha} - C_{y2} \right) \\ \Delta C_{x12} &= \frac{\mu S_2}{\pi l_1 l_2} C_{x1} C_{y2} + \frac{v-x}{2\pi} \cdot \frac{S_2 C_{y2}}{l_1 l_2} \left(57,3 \frac{dC_{x1}}{d\alpha} - C_{y1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

По этим формулам и ведется весь расчет.

Величины μ , ν и χ зависят лишь от геометрических соотношений коробки крыльев, величины C_{y1} , C_{y2} , C_{x1} и C_{x2} , а также

$$\frac{dC_{y1}}{d\alpha^{\circ}}, \quad \frac{dC_{y2}}{d\alpha^{\circ}}, \quad \frac{dC_{x1}}{d\alpha^{\circ}} \quad \text{и} \quad \frac{dC_{x2}}{d\alpha^{\circ}}$$

соответствуют здесь изолированным крыльям, рассматриваемым как монопланы того или другого размаха ¹⁾.

В тех случаях, когда аэродинамические коэффициенты C_y и C_x у исследуемых крыльев сильно отступают от линейной зависимости от угла атаки, то, произведя поправку по формулам (166) и вычислив действительные углы атаки, необходимо снова подставить в формулы более точные средние значения для производных и вторично проделать писанный расчет.

¹⁾ В настоящее время в Ц.А.Г.И. разработан Г. Н. Мусинянцем очень простой графический прием пересчета моноплана на биплан, основанный на приведенных здесь формулах. Описание этого приема будет дано в скором времени в трудах Ц.А.Г.И.

Библиографический указатель.

- W. M. Kutta. Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten. III. aeron. Mitteilungen. 1902.
- Н. Е. Жуковский. О присоединенных вихрях (сообщено в Математическом Обществе 15 ноября 1905 г.). Университетская Типография. 1906 г.
- F. W. Lanchester. Aerodynamis, Vol. II, 1907 г.
- F. W. Lanchester. Aerodnetics. Vol II, 1908 г.
- N. Joukowski. Über die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt (сокр. Z. F. M.) 1910, Heft 22.
- N. Joukowski. Geometrische Untersuchungen über die Kutta'sche Strömung. Moskau I—1910 и II—1911 г.
- С. А. Чаплыгин. О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела (к теории аэроплана). Университ. Типография. 1910 г.
- Н. Е. Жуковский. Определение давления плоскопараллельного потока жидкости на контур, который в пределе переходит в отрезок прямой. (Сообщено в Математическом обществе 15 марта 1911 г.). Труды Отделения физ. наук О. Л. Е. 15 выпуск.
- Н. Е. Жуковский. Теоретические основы воздухоплавания. Студенческое Издат. Общество при МВТУ. 1911 г., 2-е издание 1925 г.
- Н. Е. Жуковский. О поддерживающих планах типа Антуанет. (Сообщено в Матем. Обществе. 1911 г. апреля 25). Труды Физ. Отд. Общества Любит. Естествознания в Москве. I, XV, вып. II.
Эта работа была переведена в 1913 г. на немецкий язык.
- С. А. Чаплыгин. Теория решетчатого крыла. Москва. 1914 г.
- С. А. Чаплыгин. К общей теории крыла моноплана. Высший Военный Редакционный Совет. 1922.
- С. А. Чаплыгин. Схематическая теория разрезного крыла аэроплана. Научно-Техн. Вестник. № 4 и 5.
- Л. Прандтль. Подъемная сила и лобовое сопротивление несущих поверхностей в теории. Перевод ЦАГИ под редакцию В. П. Ветчинкина.
- А. А. Саткевич. Аэродинамика, как теоретическая основа авиации. Петроград. 1923 г.
- L. Prandtl. Ergebnisse und Ziele der Göttingen Modell Versuchsanstalt. Z. F. M. 1912 г.
- L. Prandtl. Tragflügeltheorie, I Mitteilung. 1918.
- L. Prandtl. Tragflügeltheorie, II Mitteilung. 1919.
- L. Prandtl. Näherungsformel für den Widerstand von Tragwerken. Technische Berichte Flugzeugmeisterei (сокращенно Т В.), том II.
- L. Prandtl. Der induzierte Widerstand von Merdeckern. Т В., том III.
- L. Prandtl. Die neueren Fortschritte der flugtechnischen Strömungslehre. Z. des. Vereines Deutscher Ingenieure (сокр. Z. V. D. I.). 1921.
- L. Prandtl. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. I Liferung 1919, II—1923.
- L. Prandtl. Applications of modern Hidrodynamics to Aeronautics. Report № 116, National Advisory Committee for Aeronautics (сокр. NACA), Waschington. 1921.
- A. Betz. Beiträge zur Tragflügeltheorie mit besonderer Berücksichtigung des einfachen rechteckigen Flügels. Doktor. Dissertation, 1919.
- A. Betz. Tragflügeltheorie. 1920.
- A. Betz. Die gegenseitige Beeinflussung zweier Tragflächen Z. F. M. 1914.
- A. Betz. Berechnung der Luftkräfte auf eine Doppeldeckerzelle aus den entsprechenden Werten für Eindeckertragsflächen. Т. В., I Bd.

- A. Betz. Einführung in die Theorie der Flugzeug Tragflügel. Die Naturwissenschaften. 1918.
- A. Betz. Wirbel und im Zusammenhang damit stehenden Begriffe der Hydrodynamik. Z. F. M., 1920.
- H. Bader. Grundlagen der Flugtechnik. 1920.
- H. Bader. Flugzeugbaukunde. Berlin. 1924.
- R. Grammel. Die Hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. Sammlung Vieweg. 1917.
- M. Munk. Spanweite und Luftwiderstand. T. B., I.
- M. Munk. Beitrag zur Aerodynamik der Flugzeugtragorgane T. B., II.
- M. Munk. Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges. Dissertation, 1919.
- H. Glauert. Calculation of the characteristics of Tapered Wings. R. a. M. № 767, 1921.
- H. Glauert. Some Applications of the Vortex Theory of Aerofoils R. a. M. № 752, 1921.
- H. Glauert. Theoretical Relationships for a biplane. R. a. M. № 901, 1924.
- H. Glauert. Experimental tests of the vortex theory of aerofoil. R. a. M. № 889, 1924.
- H. Glauert. Aerofoil theory. R. a. M. № 723, 1923.
- H. Glauert. A method of calculating the characteristics of a tapered wing. R. a. M. 824, 1922.
- A. Fage. On the theory of tapered aerofoils. R. a. M. № 806, 1923.
- A. Fage. The prediction on the Prandtl theory of the lift and drag for infinite span from measurement on aerofoils of finite span. R. a. M. № 903, 1923.
- W. Cowley u L. Jones. An experimental test of the Prandtl correction for tunnel wall interference. R. a. M. № 898, 1924.
- H. Glauert. The interference of wind channel walls on the aerodynamic characteristics of an aerofoil. R. a. M. № 867, 1923.
- L. Simmons. Note on the applications of the vortex theory of aerofoils to the prediction of downwash. R. a. M. № 914, 1924.
- L. Simmons and E. Owner. An investigation of downwash in the slipstream. R. a. M. № 882, 1924.
- M. Munk. General biplan theory in four parts. NACA. № 151, 1922.
- N. Florine. Trainée induite des ailes d'avions. Bulletin du Laboratoire Aérotechnique de Belgique. Bruxelles. 1922.
- M. Roy. Sur la Theorie des Surfaces portantes. Scientia, 1922.
- Fuchs-Hopf. Aerodynamik. Berlin, 1922.
- Сборник. Vorträge aus dem Gebiete der Hydro-und Aerodynamik (Innsbruck 1922).
Статьи E. Trefftz'a, C. Wieselsberger'a, L. Prandtl'я и друг.
- Handley Page. The Handley Page Wing. The Aeronautical Journal, June 1921, № 126.
- G. Lachman. Das Unterteilte Flächenprofile. Z. F. M. № 11, 15 Juni 1921.
- G. Lachman. Neuere Versuchsergebnisse mit Spaltflügeln. Z. F. M. №№ 10, 15, 16, 17 и 18; 1924.
- C. Wieselsberger. Untersuchungen über Handley Page Flügel. Z. F. M. № 11, 1921.
- R. Katzmayr und L. Kirsten. Versuche mit Spaltflügeln. Z. F. M. № 11, 1921.
- W. Klemperer. Ein Beitrag zum Spaltflügelproblem. Z. F. M. № 20, 1921.
- R. Reynolds. Zur Spaltflügelfrage. Z. F. M. № 9, 1922.
- H. Glauert. The Handley Page Slotted Wing. Aeronautical Research Committee. R. a. M. № 834. March 1922.
- H. B. Irving and A. S. Batson. Some experiments on a slotted aerofoil. Aer. Res. C. R. a. M. № 929. May 1924.

СОДЕРЖАНИЕ.

Предисловие	Стр. 3
Введение	5
Часть I.	
I. Основы теории вихрей	7
II. Вывод теоремы проф. Н. Е. Жуковского для крыла конечного размаха	12
III. Влияние вихревых усов на крыло	15
IV. Переход от одного размаха крыльев к другому	22
V. Применение теории индукции к расчету полипланов	27
VI. Приближенная формула для определения индуктивного сопротивления	38
VII. Индуктивное сопротивление аэродинамических труб	40
Часть II.	
VIII. Общая теория монопланного крыла конечного размаха	46
IX. Монопланное крыло с эллиптическим законом распределения циркуляции по размаху	52
X. Расчет крыльев произвольной формы	59
XI. Индуктивное сопротивление полипланов при эллиптическом законе распределения циркуляции по размаху всех крыльев	70
XII. Наивыгоднейшие полипланы	77
XIII. Влияние коробки крыльев на оперение самолета	84
Часть III.	
XIV. Приложение теории индуктивного сопротивления к расчету статической устойчивости самолета	89
XV. Применение теории индуктивного сопротивления для общего исследования полетных свойств аэропланов	102
XVI. Влияние вырезов в крыле и шайб на его концах на его аэродинамические свойства	109
Заключение	114
Дополнение к главе V	115
Библиографический указатель	121

